



UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE APOLÔNIO E SUA CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO

Rovilson Mafalda

EPUSP – Escola Politécnica da USP, Depto de Engenharia de Construção Civil
rovilson.mafalda@poli.usp.br

Alexandre Kawano

EPUSP - Escola Politécnica da USP, Depto de Engenharia Mecatrônica
akawano@ime.usp.br

RESUMO

Dadas três circunferências, a resolução do problema de Apolônio consiste em encontrar circunferências tangentes às três que são dadas. Neste artigo apresentamos um caminho de solução que demanda poucas construções geométricas em comparação com métodos existentes. Descrevemos passo a passo o desenvolvimento da solução, discutimos as justificativas das construções e indicamos referências para consulta de várias demonstrações. A solução apresentada é uma simplificação de uma solução geral por nós desenvolvida.

Palavras-chave: **problema de Apolônio, construções geométricas, inversão.**

ABSTRACT

Given three circles, the resolution of the Apollonius problem consists of finding tangent circles to the three given. It is presented an solution way that demand few geometric constructions in comparison with existing methods. We describe the development of the solution step by step, argue the justifications of the constructions and indicate references for some demonstrations. The presented solution is part of an general solution developed by us.

Keywords: **Apollonius problem, geometric construction, inversion.**

1 Introdução

Existem vários métodos gráficos geométricos para se resolver o problema de Apolônio. Um dos aspectos que diferencia tais métodos é o número de interseções que precisam ser determinadas para a construção, dependendo do caso, das oito soluções que admite o problema. Como foi mostrado na referência (MAFALDA, 2007), entre os métodos clássicos de solução o que demanda a determinação do menor número interseções é o que foi proposto por

François Viète (1540 – 1603)¹. Entretanto, o menor número de intersecções nem sempre indica que método em questão é mais simples de ser executado com os instrumentos régua e compasso. A complexidade e a simplicidade de construções geométricas foram tratadas pioneiramente por LEMOINE, (1902).

Embora a solução que apresentamos neste artigo demande um número maior de intersecções em relação ao método de Viète, sua execução é relativamente mais simples pois trabalha-se diretamente com elementos que são dados, sem a necessidade de uso explícito de transformações geométrica, neste caso a homotetia central. Com isso, obtemos soluções com um bom grau de exatidão em construções manuais com régua e compasso.

Apresentamos o desenvolvimento desta solução passo a passo, discutimos as justificativas das construções e indicamos referências para consulta de várias demonstrações. A solução apresentada é uma simplificação de uma solução geral por nós desenvolvida.

2 Desenvolvimento da solução

Sejam três circunferências $\alpha_{(A,r_1)}$, $\beta_{(B,r_2)}$ e $\gamma_{(C,r_3)}$ como mostra a figura 1. O desenvolvimento desta solução começa com a obtenção do centro radical determinado pelas três circunferências. Para isso, é necessário encontrar dois dos três os eixos radicais. O centro radical, **J**, é a intersecção de dois eixos radicais.

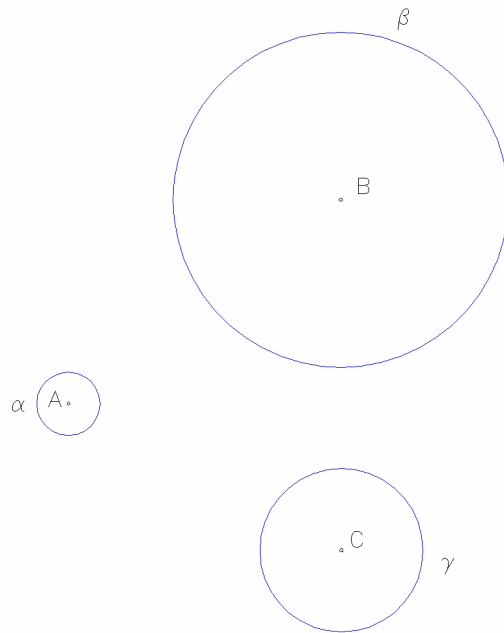


Figura 1: Problema de Apolônio: enunciado

Como a potência do centro radical, **J**, é positiva, ele é centro de uma circunferência $\delta_{(J,r)}$, ortogonal às circunferências α , β e γ (COXETER; GREITZER, 1967).

¹ Matemático Francês que fez uma reconstituição das supostas soluções do problema de Apolônio.

Vamos analisar agora as relações da circunferência $\delta_{(i,r)}$ com as circunferências α , β e γ em função da transformação geométrica inversão. É sabido que a inversão transforma retas em retas ou circunferências e, circunferências em circunferências. A principal propriedade da inversão é que esta preserva ângulos. Isto é, se invertermos δ , α , β e γ , suas inversões manterão com δ' o mesmo ângulo, que neste caso é 90° . Portanto se, tomarmos δ como circunferência de inversão, a inversa de δ , δ' , coincide com δ . Assim as inversas de α , β e γ , α' , β' e γ' , coincidem com α , β e γ (COXETER; GREITZER, 1967).

A outra relação que precisa ser analisada é aquela que existe entre as oito soluções do problema e a transformação geométrica inversão. O que queremos saber agora é o que ocorre com as oito soluções do problema quando invertemos α , β e γ tomando δ como circunferência de inversão. Ocorre o seguinte: como α , β e γ não mudam de posição quando são invertidas em relação a δ , segue que quatro das soluções são invertidas nas outras quatro soluções. De outro modo, as oito soluções são duas a duas mutuamente inversas, por uma circunferência ortogonal a α , β e γ , δ .

Os seis centros de homotetia determinam quatro retas, chamadas eixos de homotetia. A última relação a ser analisada diz respeito a função destes eixos, os três internos e os três externos. Um deles é chamado eixo de homotetias diretas e os outros três eixos de homotetias inversas. É sabido que o eixo de homotetias diretas é eixo radical de um par de soluções do problema (ROUCHÉ; COMBEROUSSE, 1949). No nosso trabalho apresentamos a extensão desta demonstração para os eixos de homotetias inversas utilizando a transformação geométrica chamada **inversão com potência negativa**. Com isso, ficou demonstrado que em todos os casos do problema de Apolônio, os eixos de homotetias são os eixos radicais de um par de soluções, quando elas existem (MAFALDA, 2007).

Para fechar esta cadeia de raciocínios precisamos de um teorema que é relacionado ao conceito de feixes de circunferências. Uma introdução sobre feixes de circunferências pode ser vista na referência (COXETER; GREITZER, 1976).

Teorema 1: Sejam três circunferências α , β e δ . Se δ inverte α em β , δ pertence ao feixe de circunferências formado pelas circunferências α e β .

A demonstração deste teorema pode ser visto tanto no nosso trabalho (MAFALDA, 2007) de um modo bem mastigado. Se preferir algo mais bruto indicamos a referência (COXETER; GREITZER, 1976). Sejam \mathbf{GH} , \mathbf{FG} , \mathbf{EH} e \mathbf{FI} os eixos de homotetia determinados pelas circunferências α , β e δ . Pelo teorema 1, a circunferência δ pertence aos quatro feixes de circunferências. De outro modo, δ e cada um dos quatro eixos de homotetia determinam um feixe de circunferências, os quais contém cada um, duas soluções para o problema.

A seguir descrevemos graficamente as construções com régua e compasso que levam a construção das oito soluções deste caso do problema.

2.1 Primeira etapa

Primeiro, construímos dois dos três eixos radicais das três circunferências e encontramos o eixo radical **J**. Tendo encontrado o eixo radical, construímos a circunferência $\delta_{(i,r)}$, ortogonal às circunferências α , β e γ . Construímos os centros e os eixos de homotetias como ilustramos na figura 2.

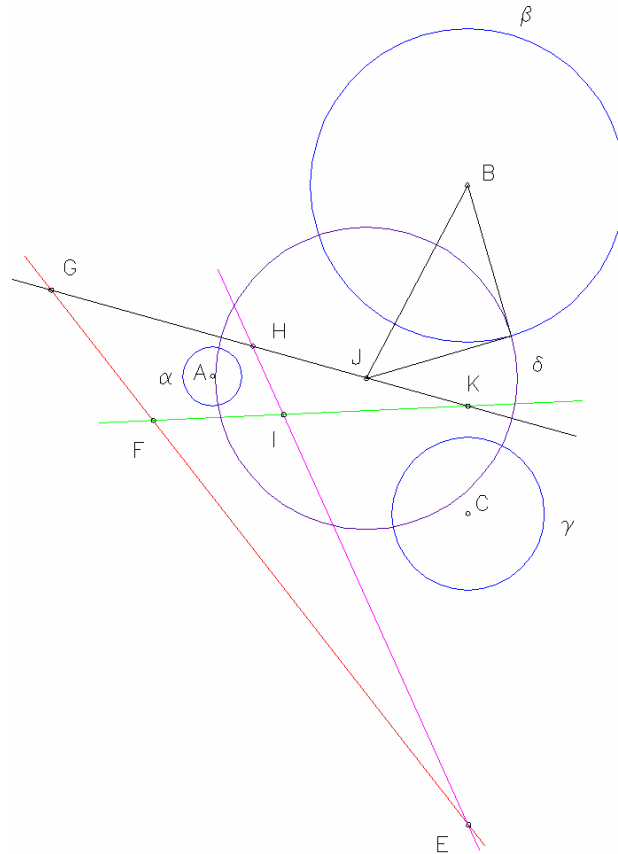


Figura 2: Circunferência ortogonal e eixos de homotetias.

2.2 Segunda etapa

Para construir duas das soluções, escolhamos o feixe interceptante formado pelo eixo radical **EH** e a circunferência δ . Como o feixe é interceptante, todas as circunferências pertencente a ele passam pelos pontos onde **EH** intercepta δ , pontos **L** e **M**. Assim, o problema se transforma na construção de uma circunferência que passa por dois pontos e é tangente a uma circunferência.

Sabemos que este problema tem duas soluções. Para encontrá-las, precisamos encontrar sobre o eixo radical **EH** pontos que tenham a mesma potência para cada uma das circunferências dada e para as circunferências do feixe. Aproveitando o fato que δ intercepta α , β e γ , basta escolher uma das cordas formadas e prolongá-la até que esta encontre o eixo radical **EH**. Basta realizar esta construção uma vez pois já conhecemos dois pontos da solução. Utilizamos uma circunferência auxiliar, φ_1 , para encontrar os pontos de tangência **O** e **P** na circunferência γ . Encontrados os pontos de tangência na circunferência γ , que contém a corda escolhida construímos as duas soluções, ε_1 e ε_2 , pertencentes a este feixe como ilustra a figura 3.

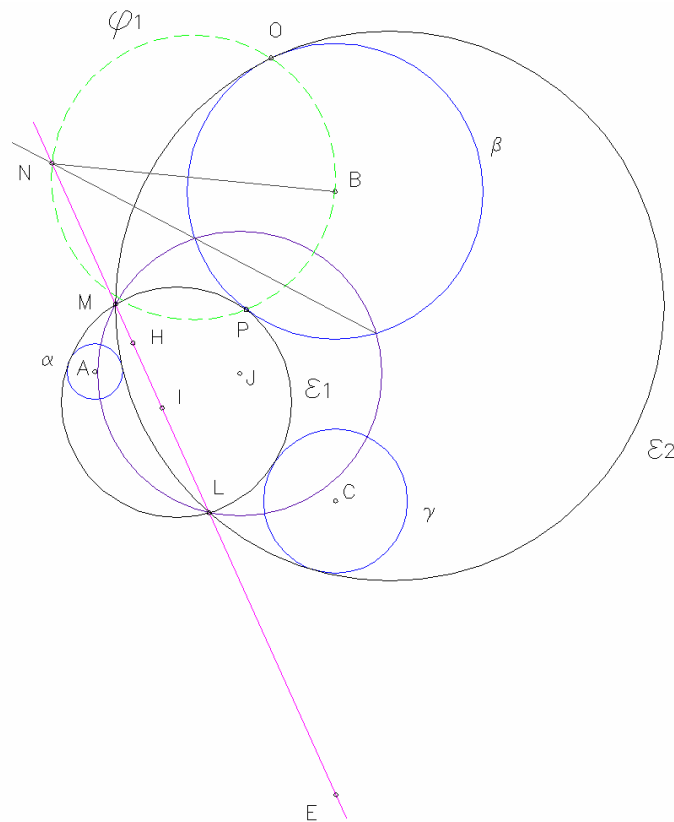


Figura 3: Construção das soluções ε_1 e ε_2 : feixe secante.

2.3 Terceira etapa

Vamos ver agora o caso em que o feixe que contém soluções é formado pelo eixo **FG** e pela circunferência δ . Este feixe é não-secante. Todas as circunferência que pertencente a ele possuem centros alinhados mas não se interceptam. Como **FG** é o eixo radical deste feixe e, aproveitando o fato de que δ intercepta α , β e γ , basta tomar cada uma das cordas formadas nas circunferência α , β e γ e prolongá-las até que encontrem o eixo radical **FG**. Por exemplo, o ponto **Q**. Por estes pontos, determinamos, por meio das circunferências auxiliares φ_2 , φ_3 e φ_4 os seis pontos de tangências **R**, **S**, **T**, **U**, **V** e **X** nas circunferências α , β e γ como ilustra a figura 4.

Depois, basta construir as duas circunferências soluções como ilustra a figura 5. A circunferência ϵ_3 é formada pelos pontos **R**, **T** e **X** e, a circunferência ϵ_4 é formada pelos pontos **S**, **U** e **V**. Neste problema os feixes que contém soluções são do tipo secante e não-secante.

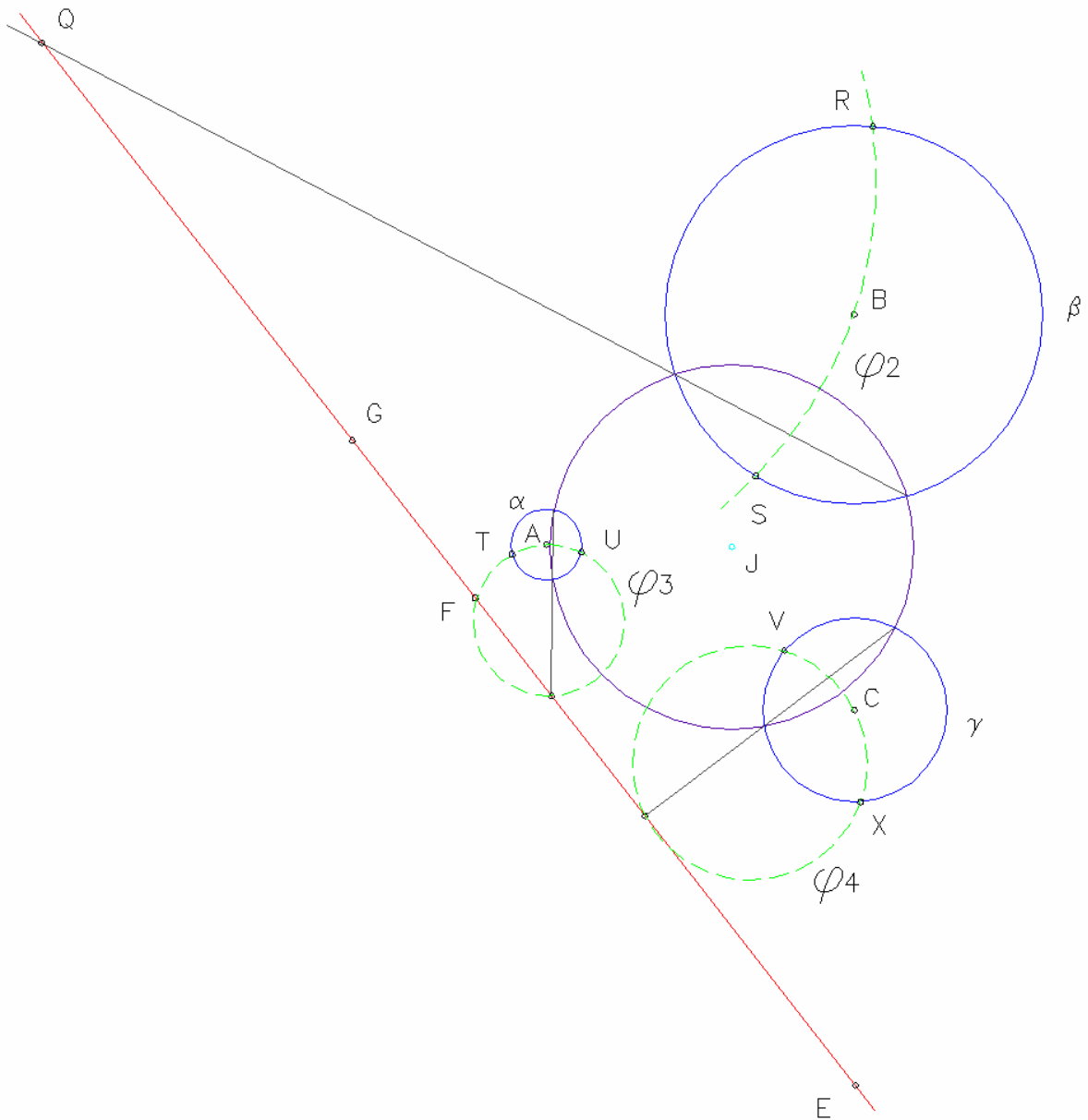


Figura 4: Construção de pontos equipotentes: feixe não-secante

Os dois exemplos dados cobrem estas duas possibilidades. Assim, as soluções dos outros dois feixes são obtidas de modo análogo as que foram obtidas na primeira etapa.

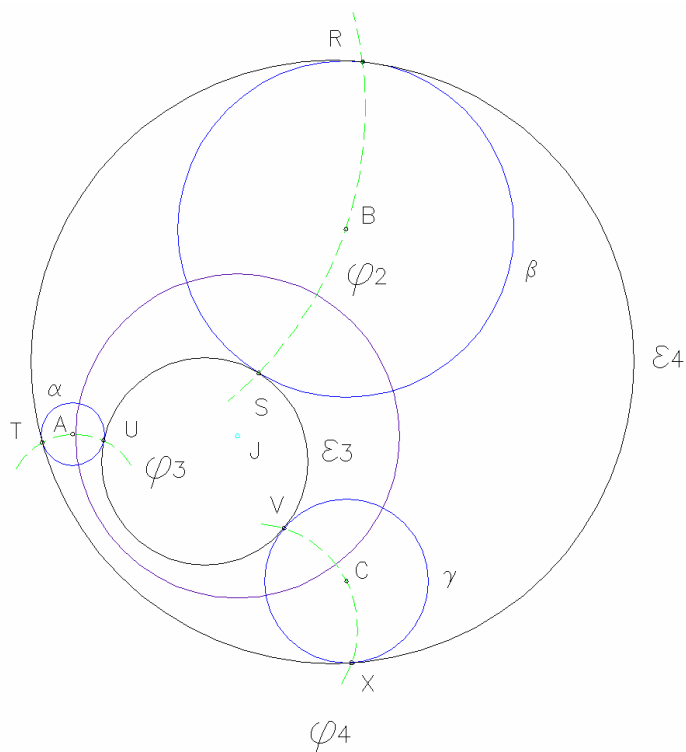


Figura 5: Construção das soluções ϵ_3 e ϵ_4 : feixe não-secante.

3 Considerações Finais

Neste artigo apresentamos o desenvolvimento de uma solução para o problema de Apolônio, passo a passo. Discutimos as justificativas das construções e indicamos referências para consulta de outras demonstrações. A solução apresentada é uma simplificação de uma solução geral por nós desenvolvida na referência (MAFALDA, 2007). Por este método, as soluções são construídas com um bom grau de exatidão gráfica.

Referências

- [1] COXETER, H.S.M, GREITZER, S.L. Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.
- [2] LEMOINE, E. Géométrie ou art des constructions géométriques. *Physico-mathématique*: n. 18, Scientia, 1902.
- [3] MAFALDA, Rovilson. **Resolução de problemas de tangências por inversões e aplicações à Engenharia**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: São Paulo, 2007.
- [4] MARMO, C. Desenho geométrico: livro II - métodos I. São Paulo: Gráfica Editora Hamburg, 1967.
- [5] ROUCHÉ, E.; COMBEROUSSE, C., Traité de Géométrie, Gauthier-Villars - 9ª edição, 1949, Paris – França.