GRAPHICA
CURITIBA, PARANÁ - BRASIL 2007

PROBLEMAS DE TANGÊNCIAS EM TRÊS DIMENSÕES: UMA CLASSE DE PROBLEMAS EM GEOMETRIA DESCRITIVA

Rovilson Mafalda
EPUSP – Escola Politécnica da USP, Depto de Engenharia de Construção Civil
rovilson.mafalda@poli.usp.br

Alexandre Kawano
EPUSP - Escola Politécnica da USP, Depto de Engenharia Mecatrônica
akawano@ime.usp.br

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma série de problemas nos quais devem-se construir uma superfície esférica que seja tangente a quatro elementos geométricos que são individualmente pontos, retas, planos e superfície esférica. Os problemas propostos são extensões naturais da generalização feita por Pierre de Fermat (1657 –1757a.C.) do problema de Apolônio de Perga (326 a.C. – 876 a.C.). Em três dimensões, estes problemas são resolvidos combinando-se métodos da Geometria Descritiva com conhecimentos sobre resolução de problemas de tangências no plano.

Palavras-chave: Geometria Descritiva, Problemas de tangências, Problema de Apolônio, problema de Fermat, Geometria Descritiva.

ABSTRACT

In this paper we present tangency problems in space. These problems are concerning with four geometric elements that are individually points, line, planes and spheres. The problems proposed are a generalization of Apollonius and Fermat problems. In three dimensional space they are solved combining the knowing techniques to solve plane tangency problems and Descriptive methods.

Keywords: Descriptive Geometry, Tangency problems, Apollonius problem, Fermat problem.

1 Introdução

Tradicionalmente, os temas Geometria Descritiva e Desenho Geométrico são tratados isoladamente tanto no Ensino de Desenho como em livros textos. A Geometria Descritiva surgiu por volta do século XVII com Gaspard Monge (1746 – 1818) e foi definida como sendo a parte da Matemática que tem por objetivo representar no plano problemas do espaço, de modo a poder resolver, com o auxílio do Desenho Geométrico[1], os problemas em que se consideram em três dimensões, a exemplo da construção de vistas ortográficas. De modo geral, nos livros textos, por exemplo (MARMO, 1967), (PINHEIRO, 1967) e (PINHEIRO, 1971), os estudantes têm pouca oportunidade de serem confrontados com problemas lógico-geométricos que requerem a aplicação de conhecimentos dos dois temas. As classes de problemas que normalmente são tratados em Geometria Descritiva são problemas de planificação, métricos e de posição de acordo com as referências (DAMM, 1964) e (REZENDE, 1962).

Na Geometria Descritiva empregamos um tratamento puramente geométrico para estabelecer a correspondência entre pontos do espaço e suas projeções em dois planos perpendiculares entre si. Para o estudo de um ou mais elementos geométricos, em geral é necessário acrescentar um ou mais planos perpendiculares aos existentes. Já no Desenho Geométrico, procuramos e/ou resolvemos relações entre elementos geométricos em um único plano. Ora, é evidente a complementariedade destes temas e, os problemas de tangências são uma classe de problemas importantes no estudo de relações geométricas no plano.

Neste trabalho propomos uma série de problemas de tangências em três dimensões envolvendo quatro elementos que são individualmente ponto, reta, plano e esfera[2]. Estes problemas são complementares àquele proposto por Pierre de Fermat em que devem-se construir uma esfera tangente a quatro outras. Nosso objetivo é apresentar uma introdução à resolução de problemas de tangências em três dimensões utilizando apenas construções com régua e compasso e reforçar a complementaridade que existe entre os temas Geometria Descritiva e o Desenho Geométrico.

2 Revisão Bibliográfica

Problemas de tangências surgem pela primeira vez no livro IV da obra Elementos de Euclides de Alexandria (325 a.C. - 265 a.C.). Nele, o autor apresenta dois problemas: como construir uma circunferência que passa por três pontos e, como construir uma circunferência tangente a três retas. Esse problema foi posteriormente generalizado por Apolônio de Perga (262 a.C. -

---

[1] Utilizamos neste trabalho o termo Desenho Geométrico com o mesmo significado de Geometria Plana.

[2] Utilizamos o termo esfera com o mesmo significado que superfície esférica para facilitar a grafia.

190 a.C.) para a construção de circunferências tangentes a arranjos formados por pontos, retas e circunferências. Deu-se assim origem aos dez casos do problema mostrados na tabela 1.

Tabela 1: Problema de Apolônio: número de casos.

primeiro caso	três pontos
segundo caso	três retas
terceiro caso	dois ponto e uma reta
quarto caso	duas retas e um ponto
quinto caso	dois pontos e uma circunferência
sexto caso	um ponto e duas circunferências
sétimo caso	duas retas e uma circunferência
oitavo caso	duas circunferências e uma reta
nono caso	uma circunferência um ponto e uma reta
décimo caso	três circunferências

A obra na qual supostamente foram publicadas as soluções deste problema, Tangências, perdeu-se. As informações que se têm sobre sua existência e autoria são baseadas no trabalho Enciclopédia de Pappus de Alexandria (290 a.C. - 350 a.C.), (FRÈRE, 1919).

A exceção de tentativas de reconstrução do trabalho Tangências por estudiosos árabes, que se supõem terem sido feitas, o problema de Apolônio esteve esquecido até o período histórico chamado Renascimento, quando François Viète (1540 - 1603) propôs ao matemático Adrianus Romanus (1561 - 1615), o problema de se construir circunferências tangentes a três outras. Romanus resolveu o problema utilizando seções cônicas. Os centros da circunferências que são tangentes às três circunferências dadas é encontrado como resultado da intersecção entre ramos de hipérboles. Como a hipérbole é uma curva que não pode ser construída com régua e compasso, Viète não ficou satisfeito com essa solução, e em 1600 publicou o trabalho L'Apollonius Français que contém soluções para os dez casos do problema juntamente com a demonstração de que não é possível construir com régua e compasso a solução de Romanus. Posteriormente, estudiosos como Rene Descartes (1596 - 1650), Isaac Newton (1642 - 1727) e também Pierre de Fermat (1601 - 1665) estudaram este problema e deram suas contribuições. Pierre de Fermat generalizou propôs a construção de esferas tangentes a quatro outras (SANTOS; TREVISAN, 2002)

Embora Monge tenha dado vários exemplos do emprego das projeções na demonstração das propriedades das figuras em três dimensões e lançar as bases para os estudos das transformações geométricas, por exemplo, por J. D. Gergonne, Brianchon, Carnot e Poncelet não se conhece solução gráfica para este problema. A solução analítica foi dada por (GERGONNE, 1875).

3 Desenvolvimento do Trabalho

Dados quatro elementos que podem ser individualmente pontos, retas, planos e esferas pedese construir esferas que se sejam tangentes aos quatro elementos dados. Quando se considera este problema, chega-se a 30 casos distintos como mostrados na tabela 2. Analisando os casos do problema, a primeira pergunta com a qual nos deparamos é saber se existe solução para todos os casos enumerados, em condições estas soluções existem e qual é o número de soluções que existem levando-se em conta tais condições.

A proximidade deste problema com o problema de Apolônio que sabemos, todos os casos têm soluções, leva a conjecturarmos o seguinte: "*Todo caso do problema de Fermat generalizado admite solução se este caso puder ser transformado em um dos dez casos do problema de Apolônio*". Embora não saibamos se este é o melhor caminho a ser seguido para tratar esse problema no contexto da Geometria Descritiva este é um caminho intuitivo como mostraremos a seguir através do caso do problema em que são dados quatro pontos.

Tabela 2: Número de casos do problema de Fermat generalizado.

1	**4**	ponto	0	reta	0	plano	0	esfera
2	3	ponto	1	reta	0	plano	0	esfera
3	3	ponto	0	reta	1	plano	0	esfera
4	3	ponto	0	reta	0	plano	1	esfera
5	2	ponto	2	reta	0	plano	0	esfera
6	2	ponto	0	reta	2	plano	0	esfera
7	2	ponto	0	reta	0	plano	2	esfera
8	2	ponto	1	reta	1	plano	0	esfera
9	2	ponto	0	reta	1	plano	1	esfera
10	2	ponto	1	reta	0	plano	1	esfera
11	1	ponto	3	reta	0	plano	0	esfera
12	1	ponto	0	reta	3	plano	0	esfera
13	1	ponto	0	reta	0	plano	3	esfera
14	1	ponto	2	reta	1	plano	0	esfera
15	1	ponto	2	reta	0	plano	1	esfera
16	0	ponto	**4**	reta	0	plano	0	esfera
17	0	ponto	3	reta	1	plano	0	esfera
18	0	ponto	3	reta	0	plano	1	esfera
19	0	ponto	2	reta	1	plano	1	esfera
20	0	ponto	2	reta	2	plano	0	esfera
21	0	ponto	2	reta	0	plano	2	esfera
22	0	ponto	1	reta	3	plano	0	esfera
23	0	ponto	1	reta	2	plano	1	esfera
24	0	ponto	1	reta	1	plano	2	esfera
25	0	ponto	1	reta	0	plano	3	esfera
26	0	ponto	0	reta	**4**	plano	0	esfera
27	0	ponto	0	reta	3	plano	1	esfera
28	0	ponto	0	reta	2	plano	2	esfera
29	0	ponto	0	reta	1	plano	3	esfera
30	0	ponto	0	reta	0	plano	**4**	esfera

3.1 Caso número 1 - 4 pontos

Sejam quatro pontos **A**, **B**, **C** e **D** de modo que sejam formados quatro planos distintos (os três pontos que definem o plano não estão alinhados). Se **A**, **B**, **C** e **D** estão no mesmo plano, o problema pode não admitir solução ou admitir infinitas soluções. No caso geral do problema, um dos pontos **A**, **B**, **C** ou **D** não está no mesmo plano que os outros três. Nesse caso, de antemão sabemos que os pontos **A**, **B**, **C** e **D** definem um tetraedro e este é inscrito em uma única esfera, do mesmo modo que uma triângulo em uma circunferência.

Primeiro, escolhemos um dos quatro planos formados pelos pontos e fazemos duas mudanças de plano de modo a obter sua visualização em **verdadeira grandeza**. Neste caso escolhemos o plano **ABC**. Uma vez obtida a verdadeira grandeza do plano **ABC**, sabemos que este intercepta a superfície esférica procurada. Como **ABC** está sendo visto em verdadeira grandeza e os três pontos pertencem a superfície esférica, a interseção resultante com o plano **ABC** com a esfera é a circunferência que passa pelos pontos **A**, **B**, **C**. Como se trata de uma esfera, seu centro está sobre a reta perpendicular **v** ao plano **ABC** que passa centro da circunferência **ABC** como mostra a figura 1.

Como a seção da esfera não varia quando esta é seccionada por planos verticais que passam pelo seu centro, tomamos um imaginário que contém a reta **v** e o ponto **D**. Depois tomamos outro plano de projeção de paralelo àquele imaginário de modo a projetarmos neste, dois pontos da esfera, a reta que contém seu centro e o ponto **D** por onde esta passa. Feito isso o problema se foi reduzido **a construção de uma circunferência que passa por três pontos**, pontos **D**, **G** e **F**. Encontramos a mediatriz de **A** e **B** e sua intersecção com a reta **v**, obtendo-se assim o centro da esfera procurada como mostra a figura 1.

Tendo encontrado o centro da esfera, a mesma está determinada. Como sua projeção não varia nos planos de projeção utilizados, sua projeção nos outros planos é obtida encontrando-se a projeção de seu centro nos outros planos de projeção. Todos os casos que em que são dados três pontos, do mesmo modo como foi exemplificado, podem ser reduzidos em situações em que são dados **três pontos** e um terceiro elemento geométrico, que pode ser ponto, reta ou circunferência. Nos casos em que o terceiro elemento é uma reta ou uma circunferência, o problema admite duas soluções.

4 Considerações Finais

Neste artigo apresentamos um caminho promissor para se chegar às construções geométricas da solução de se encontrar as dezesseis superfícies esféricas que tangentes a quatro outras que são dadas, no caso em que as três possuem raios distintos e são não secantes. O caso exemplificado e os outros nos quais são dados três pontos são resolvidos do mesmo modo. Os casos que envolvem duas e três retas, dois e três planos são desafios. Não sabemos se admitem ou não solução bem como em quais situações.

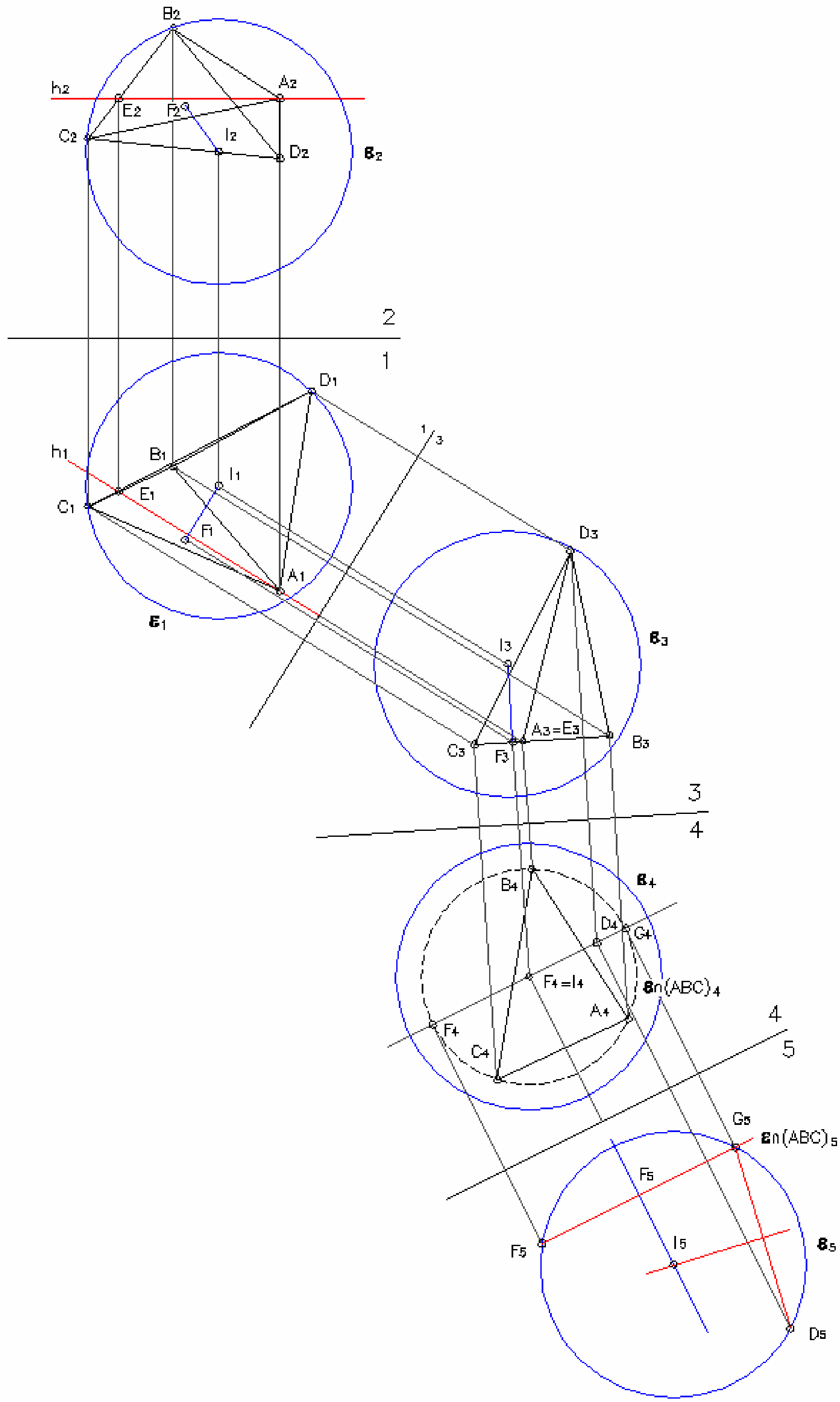

Figura 1:Seqüência de mudanças de planos de projeção.

Agradecimentos

Agradecimentos aos alunos do curso de Engenharia da Escola Politécnica, da Faculdade de Arquitetura da USP do Instituto de Geociências da USP a quem temos tido oportunidade de ministrar aulas de Geometria Descritiva nestes últimos seis anos.

Referências

[1] DAMM, R. G. G**eometria Descritiva**: exercícios e problemas. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1964.

[2] FRÈRE, G-M. Exercices de Géométrie, Cours de Mathématiques Élémentairesn. 267- J. de Gigord, Paris – 1912.

[3] GERGONNE, J.D. Recherche du cercle qui touche trois autres sur une sphère. Annales de mathématiques pures at appliquées, tome 4, Paris (1813-1814).

[4] MARMO, C. **Geometria Descritiva – livro 8**: problemas de posição e métricos. São Paulo: Gráfica Editora Hamburg, 1967.

[5] PINHEIRO, V. A. Noções de **Geometria Descritiva – vol. II**. mudanças, rotações, rebatimentos, problemas métricos. 3ª ed. São Paulo: Ao livro Técnico, 1967.

[6] PINHEIRO, V. A. Noções de G**eometria Descritiva – vol. III**. poliedros, seções planas, interseções. 2ª ed. São Paulo: Ao livro Técnico, 1971.

[7] REZENDE, D.A.B. **Geometria Descritiva**: problemas. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ononeri, 1962.

[8] SANTOS S. A.; TREVISAN, A. L. O problema de Apolônio: Seus aspectos históricos e computacionais. In: Relatório de pesquisa: Fapesp n. 02/13369-8, 2002**.**