POLIEDROS PLATÔNICOS: DUALIDADE SIMÉTRICA

Ana Magda Alencar Correia
Bruno Leite Ferreira
UFPE - Universidade Federal de Pernambuco, Depto. de Expressão Gráfica
anamagda@gmail.com, bruno_lf@hotmail.com

RESUMO

As formas poliédricas vêm sendo estudadas desde a antiguidade;todavia, foram os egípcios os primeiros a utilizá-las. Posteriormente, inúmeros geômetras buscaram entender suas propriedades, conferindo, inclusive, concepção mística, àqueles denominados como corpos cósmicos. Já no século XIX d.C., o princípio da dualidade de Poncelet (1788-1867), além de outras bases da Geometria Projetiva, tornaram possível entender outras características destes sólidos, possibilitando a sua mais simples representação no plano. Considerando a carência de bibliografia na área, apesar das 12.600 ocorrências encontradas na Internet para a expressão "Poliedros Platônicos", pretendemos, neste trabalho, apresentar parte da fundamentação teórica que consideramos imprescindível para o entendimento da especial propriedade dos poliedros platônicos e arquimedianos, quanto à possibilidade de engendramento, de modo que, de cada um, seja possível obter-se os demais.

Palavras-chave: poliedros platônicos, simetria, dualidade.

ABSTRACT

The polyhedral shapes come being studied since antiquity, but the Egyptians use it at first. After this, uncountable geometry researchers tried discover its properties, conferring a mystic conception to those who receive the denomination of cosmic bodies. In the 19th century a.C., the Duality Principle of Poncelet (1788-1867) in addition to another basis from Projective Geometry, became possible the understanding of many another characteristics of these solid, allowing, inclusively, its simple representation into the plane, the 2-D one. Considering the lack of bibliography in the area, spite of the 12.600 occurrences founded to the expression platonic polyhedra in a web search, this paper means to present part of the theoretical basis that we consider indispensable to the understanding of the

principal property of Platonic and Archimedeans polyhedra: its possibility of addition, in order that, of each one, it is possible to obtain the others.

Keywords: platonic polyhedra, symmetry, duality

1 Resgate Histórico

As formas poliédricas vêm sendo estudadas desde a antiguidade em especial, naquela época, pelos Egípcios. Um dos mais antigos documentos que comprova esses estudos é o papiro Ahmes, ou Rhind, copiado por volta de 1890 a.C. a partir de um papiro deixado por Imhotep[1], o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser (BOYER, 1996, p.8), apresentando cálculos de área e volume de troncos de pirâmides (figura 1).

Figura 1: Rhind Mathematical Papyrus (http://www.thebritishmuseum.ac.uk)

Já no século IV a.C. o filósofo grego Platão, fundador da academia de Atenas, passou a estudar os cinco sólidos regulares, influenciado por Teaetetus, e associados pelos Pitagóricos a elementos da natureza (fogo, terra, ar e água). A deferência dos Pitagóricos por um deles, o dodecaedro, levou Platão a considerá-lo como o símbolo do universo. As 12 faces pentagonais do dodecaedro regular representam, nesta acepção, tanto os meses do ano como os 12 signos do Zodíaco e, em cada uma dessas faces pode ser inscrito um pentagrama regular (figura 2). Outras propriedades geométricas do dodecaedro, em grande parte ligadas à secção de ouro, refletem a ordem e a harmonia do cosmo, justificando sua escolha como símbolo do universo[2]

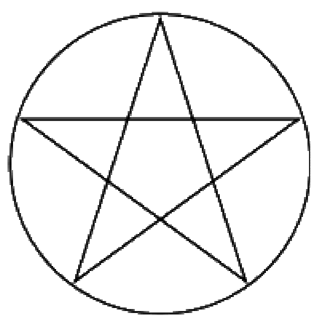

Figura 2: Pentagrama

1 Imhotep, foi um misto de arquiteto, médico e mago. Os antigos egípcios deificaram-no, identificando-o a Esculápio, deus da medicina. É o primeiro arquiteto cujo nome é conhecido por meio de documentos históricos escritos. Imhotep arquitetou a maior pirâmide do Egito - a pirâmide de Sakara, com seis enormes degraus, e que atinge aproximadamente 62 metros. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Imhotep)maior pirâmide do Egito - a pirâmide de Sakara, com seis enormes degraus, e que atinge aproximadamente 62 metros. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Imhotep)

Reconhecidamente esta pesquisa histórica indica que a metafísica pitagórica tinha uma veneração particular para os números ímpares. A perfeição dos números triangulares era assegurada pela relação entre eles e o triângulo eqüilátero, símbolo da *tetraktys*[3] e da perfeição divina. No entanto, o cinco, em especial, se relaciona com a seção áurea, com o pentágono e o pentáculo (pentagrama) e não existem, senão, cinco poliedros regulares convexos (www.geocities.com/Paris/Jardin/5925/art_parsifal4.html).

As idéias de Platão sobre os poliedros regulares foram registradas no Timaeus (BOYER, 1996, p.58), possivelmente o nome de um Pitagórico que servia como interlocutor principal. Não se sabe ao certo se Timaeus de Locri existiu ou se foi um personagem criado por Platão. De toda sorte, os poliedros regulares são, ainda hoje, designados como "corpos cósmicos"[4] ou "sólidos platônicos". Para Platão, todo sólido é limitado por superfícies que podem ser simplificadas para superfícies planas compostas de triângulos. Deste modo compôs os polígonos regulares através de triângulos escalenos definidos pelas diagonais e mediatrizes de cada face regular, obtendo o triângulo eqüilátero, o quadrado, e o pentágono regular.

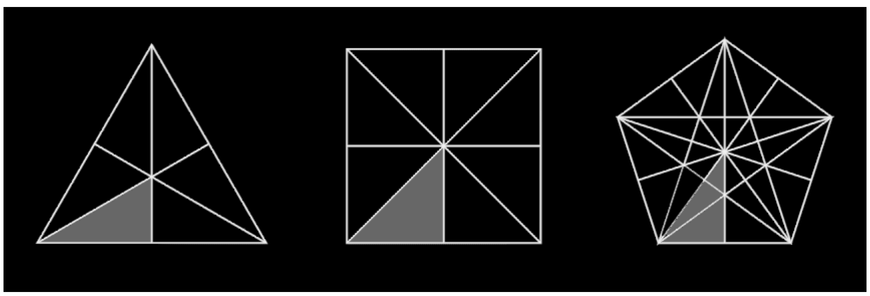

Figura 3: Construção das faces dos sólidos regulares por triângulos escalenos

Embora o Timaeus seja a mais antiga evidência da associação entre os quatro elementos da natureza com os sólidos regulares, certamente muito dessa história deve-se aos pitagóricos. Ploclus (séc. V a.C.) atribui a construção das figuras cósmicas a Pitágoras; mas, para Scridas, Teaetetus, amigo de Platão, foi o primeiro a escrever sobre eles.

Posteriormente, Euclides de Alexandria, 360 a.C.-295 a.C, escreveu sobre os poliedros regulares no Livro XI dos seus "Elementos", e às suas propriedades dedica o Livro XIII. Nesse último livro Euclides afirma que somente três dos sólidos regulares eram devidos aos pitagóricos, e que foi através de Teaetetus que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos.

Das investigações neste resgate histórico, nos parece provável que Teaetetus tenha feito um dos estudos mais extensos a cerca cinco sólidos regulares. Possivelmente tenha sido responsável pelos cálculos das razões das arestas para o raio da esfera circunscrita nesses sólidos, demonstrados em Os Elementos.

---

2 Modernamente, a física das altas energias comprovou que qualquer forma de matéria (com massa > 0) é constituída por 12 diferentes tipos de partículas elementares, exatamente tantas quantas são as faces do dodecaedro
[3] O triângulo perfeito.
4 Ao hexaedro, Platão correspondia a Terra, ao tetraedro, associava o Fogo, cuja natureza penetrante está simbolizada na agudeza dos seus vértices. O octaedro foi associado ao Ar e o icosaedro à Água. O quinto sólido, o dodecaedro, foi considerado por Platão como o símbolo do Universo. (www.geocities.com/Paris/Jardin/5925/art_parsifal5.html).

Entretanto, por imprescindível para nosso estudo, nessa obra Euclides demonstra a existência de apenas cinco sólidos regulares. Ainda sobre os poliedros regulares, no século VI d.C., Pappus da Alexandria analisou a sua projeção na superfície esférica e, Isodoro de Mileto, século VI d.C., demonstrou o princípio da dualidade entre eles, estabelecendo que o número de faces de um poliedro é igual ao número de vértices do seu dual.

É também de Euclides a nossa primeira que referência teórica sobre o processo racional de observação através do "cone visual", com vértice no olho do observador. Tal cone era constituído por um número infinito de raios visuais que intersectavam as formas visualizadas, determinando seu contorno e formas salientes. Apenas em 1525, Albretch Dürer, planificou os poliedros platônicos e utilizou a projeção ortogonal para representá-los, projetando-os segundo os seus eixos de simetria.

No século XVIII d.C., Leonhard Euler, matemático e físico suíço, estudou vários ramos da matemática pura e aplicada. Euler é ainda considerado como o estudioso que mais influencia a Matemática de nível universitário. Entre seus estudos demonstrou o talvez mais conhecido teorema para a área: a soma do número de vértices com o número de faces excede em duas unidades o número de arestas de um poliedro que seja homeomorfo[5] à esfera.

2 Simetria: uma transformação

O conceito de simetria está relacionado com o de isometria; ou seja, uma transformação geométrica, e às operações geométricas tais como a reflexão, a rotação e a translação; propriedades podem ser observadas em formas geométricas, equações matemáticas e formas e cenários maturais.

A isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre pontos. Ou seja, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido. Os ângulos mantêm também a sua amplitude. As isometrias são classificadas como simples e compostas. Entre as simples, situam-se as citadas acima.

Segundo MABUCHI (2000), o geômetra alemão Felix Klein no seu célebre programa de Erlangen (1872) sugeriu que a "simetria", conceito que, em português, pode ser traduzido por "isometria", seria o princípio organizador e unificador da geometria, ou geometrias, termo utilizado na época. Para o autor, este princípio mais abrangente que axiomático, inicialmente abriu caminho a investigações sobre grupos relacionados com as "geometrias", e teve como conseqüência, o estabelecimento do termo "transformação geométrica". Entretanto, destaca que este aspecto da então denominada Nova Matemática, é ainda considerado controverso na prática Matemática atual. No entanto é, atualmente, aplicado na resolução de vários problemas. Deste modo, o conceito de simetria é associado ou é aplicado em várias das vertentes do conhecimento humano, seja na Geometria, Matemática, Física, Biologia, Arte e até na Literatura (nos palíndromos), dentre outras.

---

[5] Dois espaços topológicos dizem-se *homeomorfos* se existir uma aplicação entre esses espaços que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Homeomorfismo).

De modo abrangente dizemos, então, que existe simetria se uma mudança em um dado sistema mantém suas características essenciais inalteradas.

A figura 4 ilustra tal característica em arranjo de cargas elétricas, apresentando as linhas de força para duas cargas puntiformes positivas e de valores idênticos. Se trocarmos o sinal de cada uma das cargas elétricas aí presentes, figura 5, o comportamento elétrico do sistema permanecerá inalterado.

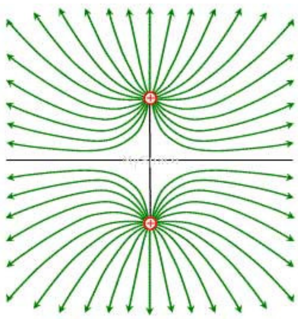

Figura 4: Cargas de mesmo sinal

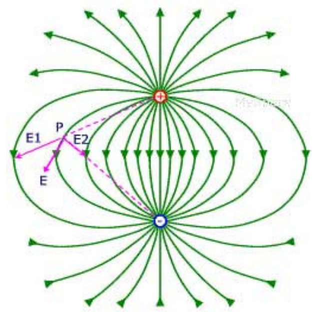

Figura 5: Cargas opostas

www.mspc.eng.br/elemag/eletr2.asp

Entretanto, para a Geometria, em particular, é necessário observar que ainda que dois objetos semelhantes pareçam o mesmo são, logicamente, diferentes. Assim, lembramos que a simetria refere-se mais a semelhanças que a igualdades, uma vez que muitas imagens simétricas podem não ser sobreponíveis ponto por ponto, à luz da Geometria Euclidiana.

Dada uma imagem, a sua simétrica preservará medidas lineares e angulares; entretanto, nem sempre manterá a direção e sentido das várias partes da figura. Deste modo, da simetria decorre uma semelhança de uma forma em torno de uma reta, ponto ou plano. Se, ao rotacionarmos uma figura, ela for sobreponível ponto por ponto, ela é simétrica (figura 6).

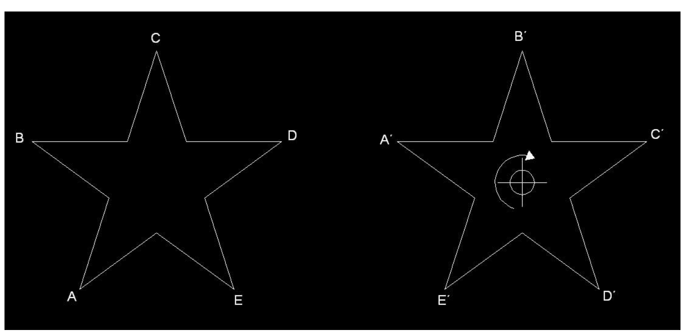

Figura 6: Simetria rotacional (eixo vertical)

Na Matemática estuda-se a simetria de um dado objeto, fazendo-se o levantamento de todas as operações que não o modificam, restituindo-o à sua identidade. Ao conjunto destas operações dá-se o nome de grupo e, especificamente é caracterizado um grupo de simetria, se o objeto for geométrico. Para o nosso estudo, consideraremos, particularmente, a simetria aplicada aos poliedros platônicos e, especificamente, a simetria rotacional.

A rotação é a transformação geométrica que aplicada a um ponto leva-o a descrever trajetórias circulares cujos centros situam-se sobre uma mesma reta, o eixo de rotação.

Neste caso, um sólido possui simetria rotacional quando um vértice troca de posição com outro, de mesma distância a uma reta (eixo), separados por ângulos de 180, 120, 90 ou 72 graus. Os poliedros platônicos apresentam simetrias rotacionais de diferentes ordens: Binária, Ternária, quaternária e Quinária.

O sólido possui simetria rotacional Binária quando um vértice troca de posição com outro, de mesma distância a uma reta (eixo) que passa pelos pontos médios de duas arestas opostas, a cada meia volta (180^o). Do mesmo modo, simetria rotacional será Ternária, se um vértice trocar de posição com outro, de mesma distância a um eixo, a cada 120º; Quaternária, a cada 90º e, quinária, a cada 72º. A figura 7 ilustra um hexaedro com seus de simetria.

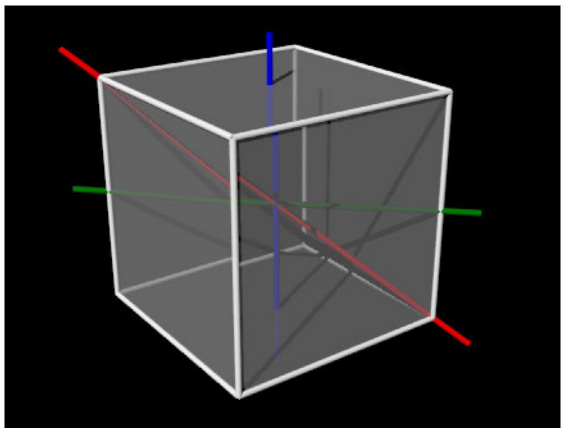

Figura 7: Eixos de simetria do hexaedro

3 Poliedros platônicos e dualidade

Os denominados poliedros platônicos são, via de regra definidos como poliedros, sólidos geométricos, cuja superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono regular.

Um poliedro é, então, dito regular, quando todas as faces são polígonos regulares congruentes, todas as arestas são congruentes e todos os vértices são congruentes. Isto significa que existe uma simetria do poliedro que transforma cada face, cada aresta e cada vértice numa outra face, aresta ou vértice. Além disso, são convexos e equiangulares.

O primeiro estudo sistemático sobre a dualidade nos poliedros deve-se a E. C. Catalan, que em um texto intitulado "Mémoire sur la théorie des polyèdres", publicado em 1865, apresenta a lista dos duais dos poliedros arquimedianos (www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf).

De fato, de acordo com COSTA (1996) a Geometria Projetiva admite um segundo princípio que complementa o da continuidade[6], o princípio da dualidade, segundo o qual, é possível admitir que qualquer propriedade demonstrada para uma forma (de espécie En), será automaticamente verdadeira para qualquer outro En, das diversas seqüências, desde que o enunciado seja adaptado ao respectivo Eo.

---

[6] O Princípio de Continuidade pode ser entendido como um elemento de generalização, não encontrado na Geometria Clássica. Segundo esse princípio, os teoremas demonstrados para uma figura são igualmente certos para figuras obtidas a partir da original mediante transformações contínuas.

Para o autor, em sua forma mais ampla, como enunciado, o principio é denominado como da multiplicidade, reservando-se o termo dualidade para a comparações entre duas formas especificas. Deste modo, à luz da Geometria Projetiva, um poliedro pode ser definido por seus vértices, gerando um polivértice, figura do espaço pontual projetivo. Entretanto, apenas pode ser considerado, de fato, um poliedro, se definido como uma figura do espaço de planos (COSTA, 1996).

Como exemplo, o hexaedro regular pode ser definido por oito pontos, que são seus vértices caracterizando um octavértice. Como poliedro, deverá ser definido por suas seis faces quadradas, sendo figura do espaço de planos. Logo, a figura dual do hexaedro no espaço pontual deverá ser definida por seis vértices, e será um hexavértice ou, um octaedro, se definido no espaço de planos, pelos oito planos que contém os seis vértices, três a três. As faces do octaedro são duais dos vértices do hexaedro. Lembra ainda o autor, que são cinco os poliedros regulares convexos, e que os demais também formam pares duais.

De outro modo, o mesmo princípio pode ser entendido, considerando-se a propriedade de que qualquer sólido platônico pode ser inscrito em uma superfície esférica[7]. Se, em um sólido platônico, traçamos o plano tangente à respectiva superfície esférica em cada um dos vértices e tomamos esses planos como os planos das faces de um novo poliedro, este será também platônico. A figura 8 ilustra esta propriedade no caso de um icosaedro e, a figura 9, um tetraedro que, de acordo com o princípio da dualidade no espaço, é autodual.

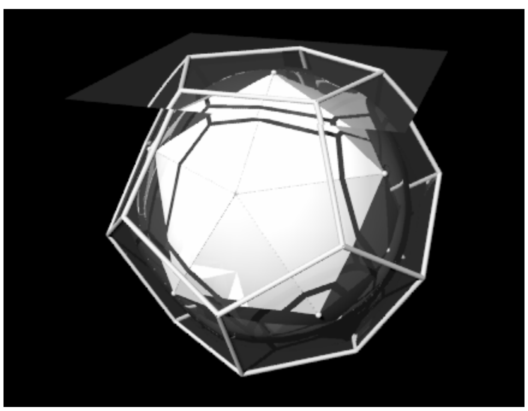

Figura 8: Exemplo: icosaedro

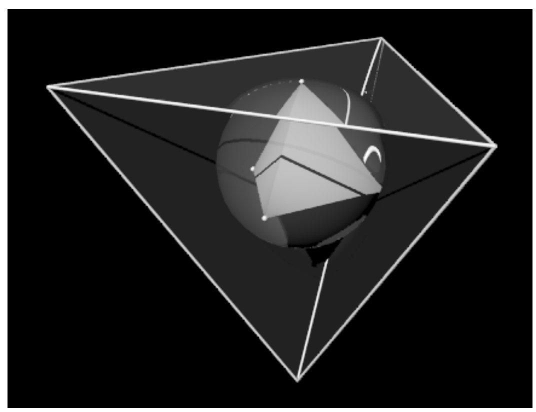

Figura 9: Exemplo: Tetraedro

De outro modo, podemos observar que se unirmos os pontos centrais dos pares de faces adjacentes de um dodecaedro obtemos também um icosaedro. Os dois octaedros são semelhantes, pois existem dilações com centro no centro do cubo que transformam qualquer deles no outro[8]

---

[7] Também os poliedros arquimedianos podem ser inscritos em uma superfície esférica. No entanto, não serão enfocados neste texto.

[8] O conceito de dualidade não se aplica a poliedros concretos, mas a classes de poliedros. (www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf)

4 Simetrias nos Poliedros Platônicos

Nos poliedros platônicos podem ser observadas simetrias de diferentes ordens. Se passarmos uma reta pelos pontos médios das arestas opostas de um tetraedro, por exemplo, e fixarmos uma posição, ao rotacionarmos o tetraedro em torno dessa reta, a mesma imagem será repetida duas vezes. A reta será, deste modo, o eixo de simetria, **aresta-aresta**, e a simetria rotacional é de ordem Binária.

Via de regra, os eixos de simetria nos poliedros platônicos são obtidos por retas que passam de vértice a vértice, de face a face e de aresta a aresta opostos, ou de vértice a face, apenas no caso do tetraedro. Todos os eixos passam pelo centro de equilíbrio dos poliedros (figura 10), que coincidem com os centros das suas esferas inscritas (insfera), circunscritas (circunsfera) e meiascritas (meiasfera), tangentes às faces em seus centros, contendo os vértices dos poliedros e tangente às arestas do poliedro em seus pontos médios.

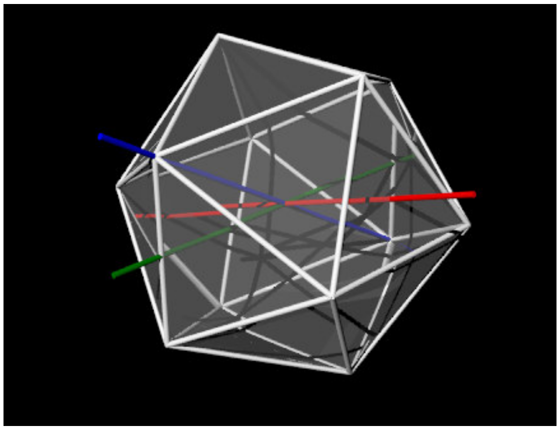

Figura 10: Eixos de simetria do icosaedro

Uma das mais importantes conseqüências desta propriedade se dá na representação dos poliedros platônicos em projeção ortogonal. A simetria rotacional presente nestas formas possibilita a sua representação mais simples pela sobreposição de vértices, aresta e faces, quando o plano de projeção é tomado perpendicularmente aos eixos de simetria.

A figura 11 ilustra um dodecaedro, projetado ortogonalmente segundo os seus eixos de simetria.

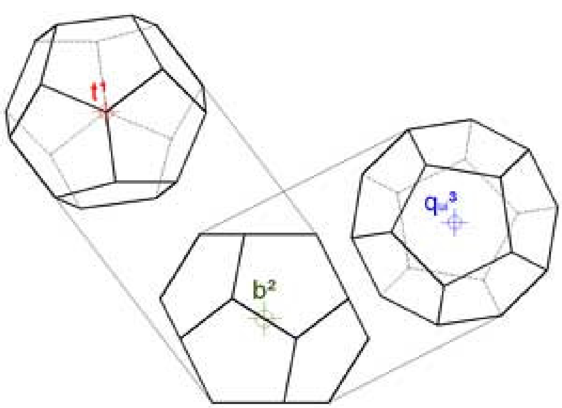

Figura 11: Projeções ortogonais do dodecaedro segundo os eixos de simetria

4.1 O Tetraedro

O tetraedro, considerado o Poliedro Platônico de mais simples representação reveste-se, entretanto, de características peculiares que lhe fornecem rigidez[9] ímpar em relação a qualquer transformação, visto que é limitado por triângulos eqüiláteros e, apenas quatro, constituindo-se no menor arranjo tridimensional possível entre formas geométricas regulares convexas (fig. 12).

Particularmente, possui eixos de simetria de apenas duas ordens: binária e ternária. A projeção, ou vista binária, é obtida em um plano perpendicular a uma reta que passa pelos pontos médios de duas arestas não adjacentes. É um exemplo típico de simetria rotacional **aresta-aresta**.

Na representação, figura 13, observamos dois triângulos semelhantes (ABC e ABD), com um lado comum (AB). Esta é outra maneira se verificar a simetria pela projeção. Notamos ainda que, qualquer que seja a medida da aresta do tetraedro, (AB) e (CD) corresponderá á sua verdadeira grandeza (figura 13).

Composto por quatro triângulos eqüiláteros reunidos três a três na composição dos seus ângulos sólidos, o tetraedro apresenta quatro vértices e seis arestas. Considerando que o eixo de simetria binária é **aresta-aresta**, neste caso, é simples concluir a existência de apenas três pares de arestas não adjacentes; ou seja, três eixos de simetria binária, o que à metade do número de arestas.

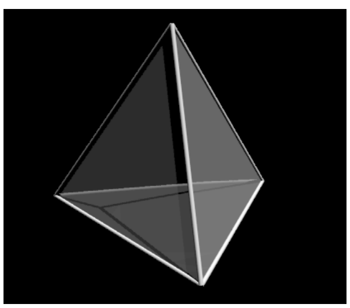

Figura 12: Perspectiva cônica

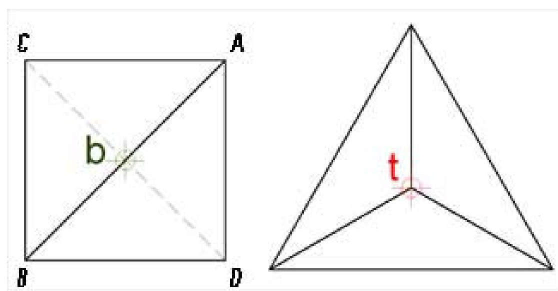

Figura 13: Simetrias binária e ternária.

Já a simetria rotacional ternária, embora a princípio distinta da "regra" para os demais poliedros platônicos, corrobora o princípio da dualidade no espaço. Passando o eixo de vértice a face, teremos um eixo de ordem Ternária. A face considerada, paralela ao plano de projeção por ser perpendicular ao eixo, é projetada em verdadeira grandeza; ou seja, um triângulo eqüilátero (figura 13). As três demais faces são projetadas como triângulos isósceles semelhantes. Uma vez que o número de vértices é igual ao número de faces, é possível se obter o mesmo número de eixos de ordem ternária no tetraedro; ou seja, quatro.

Em relação à regra referida, destacamos que um eixo de ordem Binária e um de ordem ternária, no tetraedro, não são perpendiculares entre si. Deste modo, não é possível passar de uma vista para a outra, diretamente, já que o plano de projeção para a segunda vista, em simetria, deve ser perpendicular ao eixo e ao plano de projeção da primeira vista (figura 14).

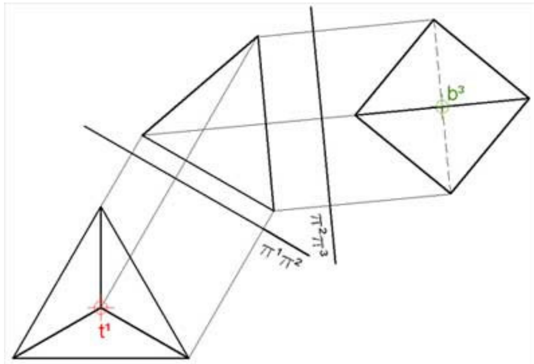

Figura 14: Tetraedro: obtenção da vista binária a partir da ternária.

4.2 O Hexaedro

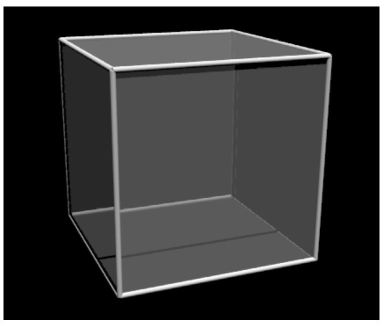

Figura 15: Perspectiva cônica

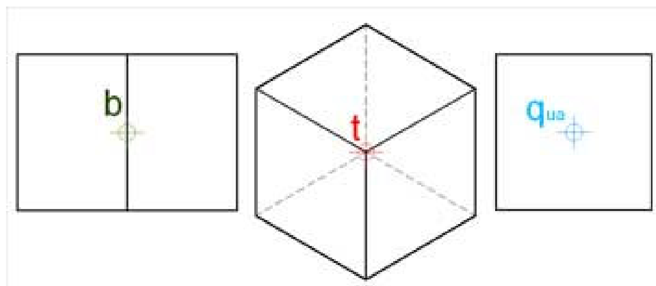

Figura 16: Simetrias binária, ternária e quaternária

No hexaedro (figura 15) os eixos de simetria Binária também são do tipo **aresta-aresta**. Como o poliedro possui doze arestas e cada eixo passa pelo ponto médio de duas opostas terá seis eixos de ordem Binária, correspondente à metade do número de arestas. De vértice a vértice, passando pelo seu centro de gravidade, são obtidos os eixos de ordem Ternária, correspondentes, obviamente, à metade do número de vértices (oito). De face a face passam os eixos (três) de ordem Quaternária (figura 16).

4.3 O Octaedro

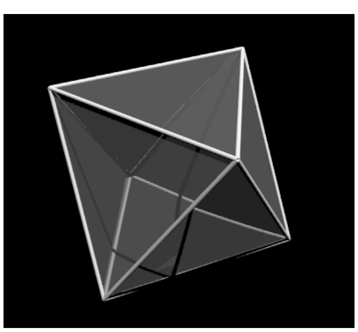

Figura 17: Perspectiva cônica

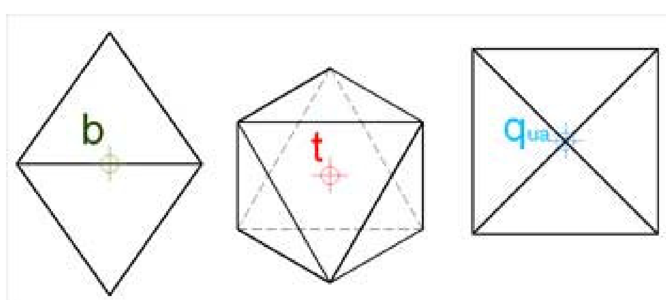

Figura 18: Simetrias binária, ternária e quaternária.

---

9 A estrutura do diamante é constituída de átomos de carbono puro dispostos nos quatro vértices de um tetraedro e um único no seu centro. Devido a essa disposição geométrica, o diamante é bastante compacto, possui alta densidade (3,5g/cm3) e é a substância natural mais dura que se conhece.

O octaedro (figura 17) possui os mesmos eixos de simetria que o seu dual, o hexaedro. Deste modo, o eixo que passa de vértice a vértice no hexaedro, no seu dual será do tipo **face-face**, e em mesmo número. O poliedro possui seis eixos de simetria de ordem Binária, quatro de ordem Ternária e três de ordem Quarternária (fig. 18).

4.4 O Dodecaedro

Assim como nos casos anteriores os eixos binários são do tipo aresta-aresta. Como o dodecaedro (fig. 19) possui trinta arestas, o número de eixos de ordem Binária é quinze. De vértice a vértice passam os eixos de ordem Ternária, em número de 10. Analogamente acontece para o eixo de ordem Quinária, do tipo face-face, correspondendo a 6 eixos (fig.a 20).

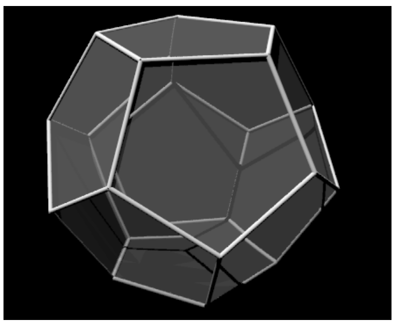

Figura 19: Perspectiva cônica

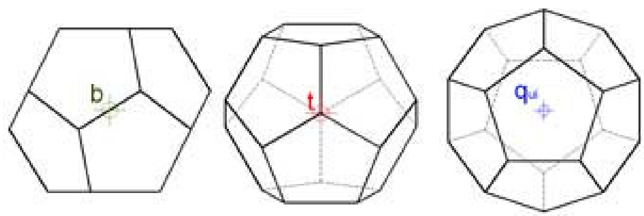

Figura 20: Simetrias binária, ternária e quinária

4.5 O Icosaedro

O icosaedro (figura 21) possui os mesmos eixos de simetria que o seu dual, o dodecaedro. Os eixos de simetria de ordem Binária são, naturalmente, do tipo aresta-aresta. No entanto, o princípio da dualidade, no espaço, determina o eixo de simetria de ordem Ternária do tipo **face-face** e de ordem Quinária, do tipo **vértice-vértice**. Quinze são os eixos de simetria Binária, dez de simetria Ternária e seis de simetria Quinária, no icosaedro (figura 22).

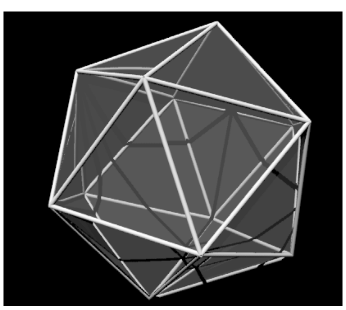

Figura 21: Perspectiva cônica

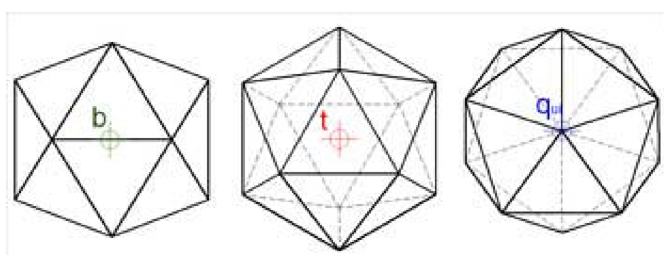

Figura 22: Simetrias binária, ternária e quinária

5 Considerações Finais

O estudo realizado até o momento tem nos levado a muitos outros questionamentos, considerando as idéias levantadas por estudiosos da área. É parte de um conceito maior, que consideramos imprescindível para o entendimento da especial propriedade dos poliedros platônicos e arquimedianos, quanto à possibilidade de engendramento, de modo que, de cada um, seja possível obter-se os demais.

Obviamente, neste trabalho, apenas conseguimos sintetizar algumas questões desta complexa e fascinante rede relacionamentos entre várias áreas do conhecimento humano que focamos nos poliedros platônicos. Também para estes, consideramos, faz-se necessário ampliar para, posteriormente, estruturar seus conceitos e propriedades em um estudo mais detalhado.

Deste modo, objetivamos estudar inicialmente fundamentos teóricos da Geometria Projetiva, buscando, finalmente, sintetizar características próprias destes corpos, tendo em vista a simplificação da sua representação gráfica, com a aplicação da transformação geométrica de simetria.

Finalmente, apresentamos a seguir propriedades que podem auxiliar na dedução de características outras entre os poliedros platônicos, à luz do princípio da dualidade, além de um quadro (quadro 1) onde podemos visualizar rapidamente as várias proposições aqui expostas.

- Em todos os poliedros platônicos o eixo de simetria de ordem Binária é do tipo aresta-aresta, uma vez que cada par de faces determina na aresta comum um ângulo diédrico;
- Apenas o hexaedro, por possuir todas as faces quadradas, e o octaedro, por possuir todos os ângulos sólidos formados por quatro faces, possuem eixos de simetria de ordem Quaternária;
- Apenas o dodecaedro, por possuir todas as faces pentagonais regulares, e o icosaedro, por possuir todos os ângulos sólidos formados por cinco faces, possuem eixos de simetria de ordem Quinária;
- O eixo de simetria do tipo vértice-vértice em um poliedro será do tipo face-face em seu dual, sendo de mesma ordem.
- No tetraedro, autodual, por possuir o mesmo número de faces e vértices, inexiste eixos de simetria do tipo face-face e vértice-vértice, uma vez que todas as faces são adjacentes e três, dos seus quatros vértices, sempre coplanares.
- A quantidade de eixos de simetria é a metade do número de elementos do poliedro em que passa o eixo, exceto o eixo ternário do tetraedro, de vértice a face, tendo a mesma quantidade que o número de vértices e faces.

Tabela 1: Quadro 1: Poliedros Platônicos: .elementos[10]

Nome	V/F	F/V	F	V	A	Eixos de Simetria			
						Binário	Ternário	Quaternário	Quinário
Tetraedro	3	3	4	4	6	3 AA	4 VF	-	-
Hexaedro	4	3	6	8	12	6 AA	4 VV	3 FF	-
Octaedro	3	4	8	6	12	6 AA	4 FF	3 VV	-
Dodecaedro	5	3	12	20	30	15 AA	10 VV	-	6 FF
Icosaedro	3	5	20	12	30	15 AA	10 FF	-	6 VV

[10] Legenda
V/F= tipo de face , F/V= faces no vértice, F= número de faces, V= número de vértices, A= número de arestas, AA= simetria aresta-aresta, VF= simetria vértice-face, VV= simetria vértice-vértice, FF= simetria face-face

Referências

[1] ALESSANDRO. **O Papiro de Ahmes (ou Rhind) e o Papiro de Moscou.** Disponível em: <http://sandroatini.sites.uol.com.br/rhind.htm> Acessado em: 25 fevereiro 2006.

[2] BARISON, Maria Bernadete. **Poliedros Regulares:** Por que são apenas cinco?. Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica>. Acessado em 3 março 2006.

[3] BOYER, Carl B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher Ltda. 1996.496 p.

[4] COLLI, Eduardo. **Poliedros.** Disponível em http://matemateca.incubadora.fapesp.br/portal/ textos/matemateca/poliedros/Poliedros.pdf. Acessado em 9 julho 2007.

[5] COSTA, Mario Duarte, COSTA, Alcy P. de A. V. Geometria gráfica tridimensional. v3. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1996.

[6] **História da geometria**. Disponível em: http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf. Acessado em: 20 fevereiro 2006.

[7] **História da Matemática na China**: Nove Capítulos da Arte Matemática. Disponível em: <http://www.malhatlantica.pt/mathis/China/china1.htm> . Acessado em 3 março 2006.

[8] MABUCHI, Takara S. Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares – nem à formação de professores. **Dissertação**. Mestrado em Educação Matemática. PUC, São Paulo, 2000.

[9] MARMOL, L. Sanchez; BEATO, M. Perez. **Geometría métrica proyectiva y sistemas de representación.** 2 ed. Tomo 2. Madrid: SAETA, 1947.1413 p.

[10] PLATÃO, **Timeu e críticas ou a Atlântida.** São Paulo: Hemus, 1981. 217p.

[11] **Platão**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%A3o> Acessado em 3 março 2006.

[12] PRESTES, Mª Luci de Mesquita. *A pesquisa e a construção do conhecimento científico:* do planejamento aos textos, da escola a academia. 2. ed. Ver. Atual. e ampl. São Paulo: Ed.Rêspel, 2003. 256 p.

[13] **Poliedros duais**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro_dual>. Acessado em 25 fevereiro 2006.

[14] RANGEL, Alcyr Pinheiro. **Poliedros**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982. 71 p.

[15] SÁ, Ricardo. **Edros.** São Paulo: Projeto Editores Associados, 1982. 121 p.