



GEOMETRIA FRACTAL: ANÁLISE DE SOFTWARES GRÁFICOS EDUCACIONAIS

Ricardo Mendonça Rinaldi
UNESP – Universidade Estadual Paulista, PPGDI - FAAC
ricardomrinaldi@ig.com.br

Marizilda dos Santos Menezes
UNESP – Universidade Estadual Paulista, Departamento de Artes e
Representação Gráfica - FAAC
zilmenezes@uol.com.br

RESUMO

O artigo traz à tona a temática da Geometria Fractal e analisa três programas educacionais, voltados ao ensino da geometria, que podem ser utilizados para compor estruturas fractais. O trabalho encerra-se ao discutir as imagens resultantes em cada software: Geometricks 2.37, NFract 1.0 e Cabri-geomètre II.

Palavras-chave: design, educação gráfica, ensino, representação gráfica

ABSTRACT

The article brings afloat the thematic from the Geometry Fractal and analyzes three educational programs, used in the teaching of the geometry, which can be used to form structures fractals. It contains when arguing the resultant images in each software: Geometricks 2.37, NFract 1.0 and Cabri-geomètre II.

Key words: design, graphic education, teaching, graphic representation

1 Introdução

O entendimento sobre a geometria é antigo. Ela foi criada para melhor compreender a natureza e o espaço em que vivemos. Com seu auxílio, muitas formas de representações puderam ser difundidas e sua aplicação foi propagada em diversas áreas do conhecimento como a matemática, física e química.

A Geometria Euclidiana, que descreve entre outras formas os triângulos, círculos e cones, é capaz de solucionar problemas relacionados ao desenho e às obtenções de formas existentes. No entanto, a constituição do mundo, das formas naturais em sua totalidade, possui formas determinadas pela irregularidade e fragmentação. O desenho de rochas, plantas, rios e montanhas são contrários às formas encontradas na clássica Geometria Euclidiana.

Então, como é possível representar as saliências e imperfeições que estão presentes nas formas encontradas na natureza? A Geometria Fractal pode demonstrar e fazer aproximações desses formatos. A ciência dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade e beleza infinita, ligadas às formas da natureza.

Nas últimas décadas aconteceram investigações vinculadas ao universo da geometria e os fractais despontaram com os estudos do matemático polonês Benoit Mandelbrot. O nome fractal é baseado no adjetivo em latim *fractus*, cujo verbo *frangere* significa partido, quebrado. Portanto, ao se dizer Geometria Fractal, está se fazendo referência ao estudo dos fractais.

Segundo MANDELBROT (2004), os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Ele ainda constatou que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza. Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa produz resultados fascinantes e impressionantes.

Encontramos em MENEZES (2003) que existem dois tipos de fractais: os geométricos (determinísticos) e os não-lineares (ou aleatórios). Os fractais geométricos ou determinísticos são gerados a partir de reproduções exatas de si mesmo em menor escala. Apesar de suas características especiais, os objetos fractais descritos determinísticos não permitem descrever inteira ou adequadamente as formas existentes na natureza. Já os fractais aleatórios, raramente exibem auto-semelhança exata, contudo quase sempre apresentam a chamada auto-semelhança estatística. Esta nova classe recebeu a denominação de fractais não-determinísticos e diferem dos anteriores por incluir certo grau de aleatoriedade no cálculo dos novos pontos.

O trabalho teve como objetivo principal o aprendizado e a experimentação de ferramentas computacionais disponíveis no mercado que possibilitassem a criação de formas fractais. *Softwares* como o Geometricks, Nfract e Cabri II são apresentados neste trabalho. Eles tiveram seus comandos experimentados e suas imagens discutidas.

Não é intenção do trabalho ensinar o uso dos *softwares* estudados. Seu objetivo é verificar a representação das formas geradas por meio de suas ferramentas e promover uma comparação entre as imagens obtidas.

2 Fractais gerados em programas gráficos

A tecnologia dos computadores auxilia nas tarefas de diversas áreas. Os programas gráficos são capazes de solucionar problemas de projeto, pois criam em seus ambientes de trabalho os produtos que estão sendo desenvolvidos e antecedem seu aspecto final. Os erros de projeto podem, no entanto, ser facilmente visualizados e algumas etapas previstas sem dificuldade. Há programas específicos voltados para a geometria e alguns acompanham livros educacionais.

Após levantamento bibliográfico, foi possível selecionar programas que fazem uso da geometria e são capazes de promover o desenho de estruturas fractais. A geração de suas

imagens foi observada e comparada.

Foram utilizados programas computacionais facilmente acessíveis (de baixo custo ou disponíveis nos Laboratórios da Unesp/Bauru) como o Geometricks versão 2.37, de origem dinamarquesa; NFract desenvolvido no Brasil e o Cabri - géomètre II, desenvolvido na França.

2.1 Geometricks versão 2.37

O *software* foi desenvolvido pelo dinamarquês Viggo Sadolin, da *The Royal Danish School of Education, Copenhagen*, Dinamarca e traduzido por Miriam Penteado e Marcelo Borba (UNESP, Rio Claro, SP). Com manual em português, o programa é distribuído pela Fundação Editora da UNESP, sediada na cidade de São Paulo.

O programa *Geometricks* é capaz de gerar pontos, retas, circunferências e fazer cálculos de distância entre pontos e área de figuras. Além da execução de formas estudadas na Geometria Euclidiana, o *Geometricks* conta com uma introdução ao estudo da Geometria Fractal, gerando desenhos a partir de iterações de formas. Para gerar essas imagens, o programa conta com um menu especial, onde os fractais poderão ser desenhados com a ajuda de comandos específicos para esta finalidade. O *Geometricks* pode ser utilizado diretamente no CD ou instalado no computador.

Antes de iniciar os desenhos dos fractais é preciso representar, na área de trabalho do programa, formas geométricas compostas por pontos. Esses pontos serão as bases para a formação de ternas (conjunto de três pontos) que definirão o desenho final dos fractais. Existe na tela do *Geometricks* uma barra de menus composta por vários comandos e entre eles há a opção Fractais, conforme apresentado na Figura 1.

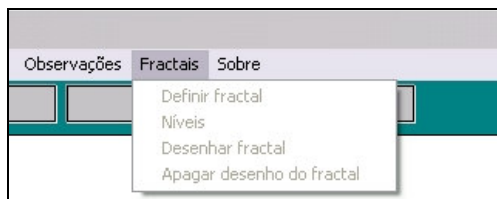


Figura 1: Detalhe dos comandos para a obtenção dos Fractais

Com ele é possível explorar diferentes níveis de obtenção dos desenhos. Neste tópico existem quatro opções, a saber:

- Definir fractal: este comando é o responsável pela definição das ternas que irão compor o desenho. O programa permite o uso máximo de dez combinações de três pontos.
- Níveis: através do comando em questão, é possível visualizar a figura em diferentes níveis de iteração. A visualização compreende os níveis de 1 a 10.
- Desenhar fractal: ao se clicar neste comando o fractal começará a ser desenhado.
- Apagar desenho do fractal: o desenho será apagado e o usuário poderá reiniciar a obtenção da forma em outro nível desejado.

A Figura 2 apresenta a tela inicial do programa onde é possível visualizar a barra de comandos na área superior e comandos específicos como cores e *zoom* ao lado direito.



Figura 2: Tela inicial do programa Geometricks

Com uma forma básica formada por pontos a opção *definir fractal* poderá ser acessada. Ele pedirá ao usuário que se insira no programa o número de ternas que será utilizada para a composição da figura. O número de ternas deverá estar compreendido entre um e 10. Após a seleção dos pontos, seleciona-se a opção *níveis*. Os níveis devem estar entre um e 10. Com as ternas marcadas e os níveis pré-definidos, o comando desenhar fractal deverá ser acionado. O desenho surgirá entre os pontos marcados na área de trabalho do programa. Para apagar o desenho basta clicar nesta opção.

As figuras adquiridas com o uso do *software* possuem características de fractais geométricos. Para utilizar as ferramentas que desenharam fractais é necessário um conhecimento prévio sobre o assunto. O programa define o desenho com sua forma finalizada, ou seja, não mostra ao usuário nível por nível. Em um primeiro momento ele representa o fractal no nível máximo que o programa o explora. É preciso fazer iterações separadas para visualizar o processo de geração do desenho. A Figura 3 representa o início da geração de um fractal. Os pontos são marcados na área de trabalho com a finalidade de escolher quantas ternas serão utilizadas para a composição do fractal.

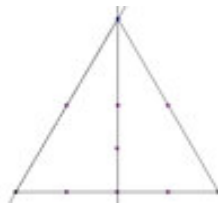


Figura 3: Demarcação de ternas

Após o usuário escolher um número x de ternas, que poderá variar entre um e 10, o desenho do fractal é gerado. A Figura 4 representa o fractal em seu nível zero. A Figura 5 irá representar o fractal em seu nível um. A iteração do fractal, neste caso, ocorrerá de acordo com as ternas demarcadas.

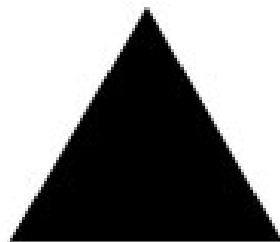


Figura 4: fractal em seu nível zero

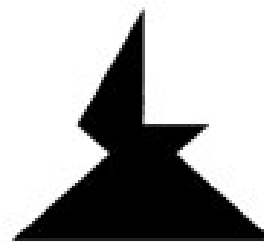


Figura 5: fractal em seu nível 1

Esses níveis representam o número de iterações que a forma foi submetida, são os processos repetitivos que irão compor o desenho do fractal. A Figura 6 representa o fractal submetido a cinco iterações. A Figura 7 mostra o fractal em seu nível 10.



Figura 6: fractal de nível 5



Figura 7: fractal de nível 10

Quando é demarcado o número de ternas (no exemplo anterior foram utilizados seis ternas) e acionado o comando desenhar fractal, ele aparecerá representado na tela em seu nível 10. Para visualizar o processo é necessário dar comandos ao programa.

Como visto, o programa utiliza-se de ternas para promover os desenhos. Por esse motivo, todas as figuras desenhadas para se submeter ao processo de construção de fractais deverão ser representadas formando triângulos. Um quadrado, por exemplo, deverá ser construído utilizando-se de ternas.

O programa *Geometricks* não faz uso de muitos ícones. Esse recurso somente é utilizado na barra de grade e *zoom*, onde as opções para este fim são encontradas, e na barra de atributos, que está inserido comandos de cores e estilo de linhas. Esta falta faz com que o usuário tenha que abrir os comandos do menu e ler os tópicos inseridos. Há um uso excessivo de abreviações como **po** para indicar ponto e **re** para a indicação de reta. Uma tela composta por ícones representando pontos, retas e circunferências poderiam aperfeiçoar a utilização do software, pois são ferramentas comumente utilizadas em programas de geometria.

2.2 NFract versão 1.0

O programa NFract permite ao usuário explorar fractais de modo rápido e fácil. As imagens produzidas por ele possuem beleza, formas e coloração diferenciadas. Este *software* foi desenvolvido pelo professor Francesco Artur Perrotti, da FATEC - Taquaritinga (SP) e acompanha o livro *Descobrendo a Geometria Fractal* escrito BARBOSA (2002).

São poucos os comandos necessários para a obtenção dos fractais. Eles são facilmente encontrados, pois o programa é provido de uma boa interface. Após o estudo dos componentes as imagens puderam ser geradas.

O programa está em sua versão inicial. Segundo informações de seu criador, é possível que o NFract seja o único *software* do gênero nacional. O *software* calcula e gera fractais por meio de uma equação de 7º grau. Os coeficientes podem ser ajustados aleatoriamente e gerar imagens únicas. Vale ressaltar que o cálculo será mais rápido ao utilizar números compreendidos entre -1 e um. A equação descrita no programa apresenta-se na seguinte fórmula: $Az^7 + Bz^6 + Cz^5 + Dz^4 + Ez^3 + Fz^2 + Gz + H$.

A Figura 8 exibe a tela inicial do NFract. A equação é apresentada e suas variáveis

poderão ser modificadas aleatoriamente. Um outro tópico da tela inicial é a profundidade que o desenho pode adquirir. Com este recurso é possível evidenciar maior ou menor grau de detalhes nas figuras obtidas pelo sistema.



Figura 8: Tela inicial do programa NFract

Há uma listagem de cores fixa no programa, porém, o usuário poderá criar a sua própria gama de cores que pode ter início com a cor branca, em níveis de cinza ou randômicas. Para iniciar a criação de uma nova gama de cores, o usuário terá que optar pelo comando *criar* no tópico *cores*. Após esta etapa poderão ser manipulados os degradês. Esses comandos são encontrados com facilidade na tela inicial.

As imagens são calculadas e as iterações são realizadas até atingir seu ponto máximo. Como dito anteriormente, ao se optar pelo uso de variáveis entre -1 e um, o cálculo para a definição da imagem será processada mais rapidamente.

Na tela inicial a equação é apresentada. Os números são digitados nos espaços estabelecidos e o mapa de cores é acionado. Ao clicar em calcular, a imagem começa a ser gerada. Tem-se a opção de ampliar detalhes da imagem e pode-se criar uma seqüência de quadros indicando ao sistema a tela inicial e a tela final desejada. Neste intervalo é gerada uma quantidade de imagens pedidas pelo usuário. A Figura 9 ilustra a ampliação da parte central de um fractal gerado pelos seguintes números: A = -1; B = 0,6; C = 0,2; D = 0,5; E = -0,1; F = 0,8; G = -0,2 e H = 1.

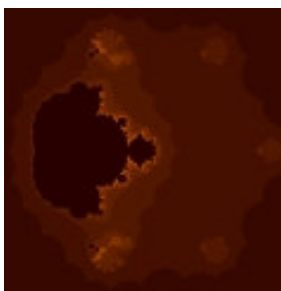


Figura 9: Ampliação central da imagem

De forma simples e rápida, qualquer pessoa pode fazer uso deste sistema, pois sua interface é simplificada e não necessita de conhecimentos aprofundados na geometria fractal. A Figura 10 coloca em evidência uma ampliação da figura anterior. A Figura 11 faz o mesmo percurso utilizando-se da imagem anterior.

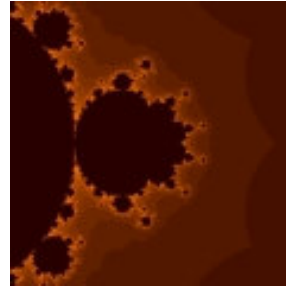
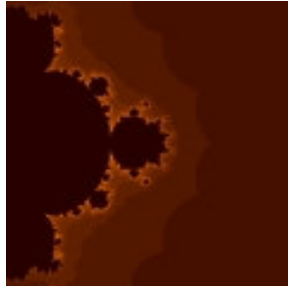


Figura 10: Ampliação da imagem anterior Figura 11: Detalhe central

As imagens geradas no *software* NFract assemelham-se às formas encontradas na natureza, contudo, os fractais gerados neste sistema são geométricos, adquiridos por meio de uma equação matemática. O programa possui arquitetura simples, fazendo uso de ícones que auxiliam em comandos como ampliação e marcação das bordas do desenho.

2.3.1 Cabri – géomètre II

Desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Frank Bellemain da Université Joseph Fourier, o programa Cabri – géomètre II conta com ferramentas capazes de desenhar circunferências, retas paralelas, angulações, marcas de mediatriz e ponto médio e outros comandos necessários no estudo da geometria. Essas ferramentas disponíveis no *software* podem ser utilizadas para a obtenção de estruturas fractais.

Atualmente o programa é distribuído pela *Texas Instruments* e sua versão é apropriada para o sistema operacional *Windows*. Possui simples instalação e seu ambiente tem uma grande área de trabalho, contando com a possibilidade de revisão das construções desenhadas, facilitando a correção de erros cometidos pelo usuário.

Para ilustrar as possibilidades de criação deste sistema será mostrada a construção de um fractal pela fronteira, quando a iteração inicia-se no contorno da figura e espelha-se na Curva de Kock. Com suas ferramentas geométricas foi possível demarcar pontos e iniciar o desenho do fractal. Um segmento de reta foi dividido em três partes iguais e uma das partes, a central, foi substituída por um triângulo eqüilátero. A Figura 12 ilustra a operação. Tomando-se esta seqüência como base, o desenho poderá ser gerado, conforme Figura 13.



Figura 12: Segmento dividido

Figura 13: Possibilidade de fractal

Para obter o segmento e dividi-lo em partes iguais, foi necessário manipular as ferramentas do sistema e possuir conhecimentos relativos à geometria. Como visto, o desenho poderá sofrer iterações. Cada novo segmento deverá ser dividido em três partes iguais e a estrutura irá

ganhar novas dimensões. A Figura 14 mostra possibilidades de transformações do desenho. Ao se unir ou sobrepor os fractais, as estruturas ganharão um destaque especial, conforme apresentado.

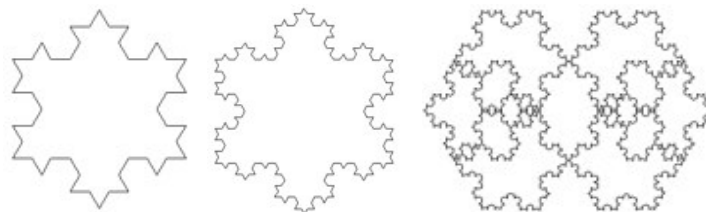


Figura 14: Fractal pela fronteira e sobreposições da forma

O programa Cabri foi desenvolvido com uma interface composta por ícones. Esta apresentação do *software* auxilia muito no trabalho do usuário do seu sistema, pois os tópicos são facilmente acessados e compreendidos.

A Figura 15 ilustra a tela inicial do programa. Na área superior da tela estão inseridos os comandos básicos para a manipulação do programa. A grande área de trabalho é um ponto positivo do Cabri.



Figura 15: Tela inicial do programa Cabri

O Cabri possui ícones de simples entendimento, são símbolos de fácil identificação e que podem ser rapidamente acionados. Há na parte inferior da tela uma janela que promove rápidas respostas ao clicar nos comandos desejados. Essa praticidade do sistema é muito benéfica para quem nunca o utilizou.

3 Análise das imagens resultantes do Geometricks, NFract e Cabri

Os programas estudados criam imagens diferenciadas entre si. Os desenhos gerados no *software* NFract são muito diferentes dos obtidos no Cabri. Este, por sua vez, também possui formas não semelhante ao Geometricks. Porém, todas as imagens registradas representam fractais.

Com representações variadas, de acordo com o programa utilizado, os fractais podem ser aproveitados como convir. Os desenhos gerados no Cabri, por exemplo, ilustram melhor as etapas de criação dos fractais e poderiam ser utilizados de modo educacional. Neste programa é preciso desenhar, através das razões geométricas, todos os passos para alcançar a imagem desejada. O conhecimento prévio da Geometria Euclidiana e da Geometria Fractal, como iterações, é fundamental para o correto aproveitamento do programa.

O sistema NFract é capaz de exibir estruturas com aparência artística, pois cria imagens com cores variadas e formas diferenciadas que podem ser utilizadas para diversos fins. As

imagens resultantes do programa já foram empregadas, por exemplo, na confecção de cartazes, capa de livro, revista, *cd* e até na elaboração de pequenos vídeos. O programa não exige do usuário conhecimentos específicos da geometria. Ele produz a imagem de acordo com os números aleatórios inseridos no sistema.

Contudo, o programa Geomtricks pode ser utilizado tanto nas artes visuais como na educação. O resultado final é bastante artístico, mas o programa exige do usuário as etapas para a obtenção do desenho. Isto é muito importante na aprendizagem da geometria fractal. Por meio dos pontos que formam as figuras é possível visualizar as iterações permitidas pelo *software*. A utilização de ternas, que servirá de base para o desenho dos fractais, precisa ser muito bem demarcada a fim de evitar erros na obtenção da imagem.

A Figura 16 compara visualmente os desenhos produzidos nos três programas estudados. Há uma clara diferença entre as imagens produzidas pelos programas apresentados, contudo, todos são fractais.

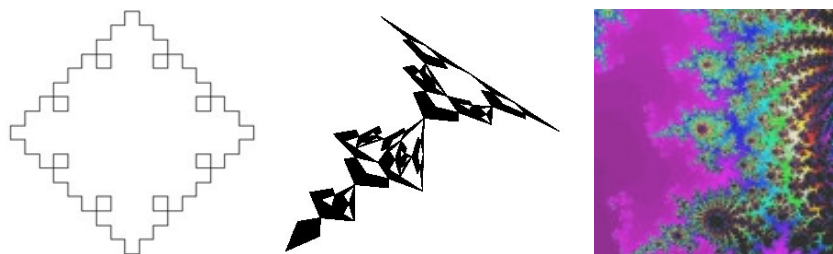


Figura 16: Fractal gerado no Cabri, Geomtricks e NFract respectivamente

O desenho gerado no Cabri teve como referência a curva de Koch. Um segmento de reta foi dividido e empregado como base para a obtenção da figura. No *software* Geomtricks, o fractal foi adquirido ao utilizar seis ternas. A figura apresenta-se em sua máxima iteração disponível no programa, ou seja, na décima. Para representar o desenho produzido no NFract foram utilizados na equação do sistema oito variáveis compreendidas no intervalo -1 e um. Após a definição da figura, uma de suas partes foi ampliada para registrar apenas um detalhe da imagem.

Podem-se obter nos programas estruturas fractais semelhantes, mas cada construção tem a sua particularidade, pois cada sistema produz uma espécie de imagem. Para demonstrar foram construídos fractais hexagonais nos três programas utilizados, mas cada representação tem sua forma individual de elaboração. A Figura 17 apresenta as construções.



Figura 17: Fractais gerados no Cabri, Geomtricks e NFract respectivamente

Note que as figuras são semelhantes em sua forma, mas cada uma possui a sua

singularidade. No programa Cabri a estrutura pode ser melhor visualizada, pois é formada apenas por linhas retas. No software Geometricks as iterações sofridas pela imagem comprometem os contornos do desenho. O NFract possui um caráter mais artístico para as suas composições. A imagem além de sofrer iterações constantes, ganha também profundidade pelo uso excessivo de cores do sistema gerador de fractais.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/CNPq/Unesp processo 115969/2005-5.

Referências

- [1] BARBOSA, RUY MADSEN. **Descobrimo a Geometria Fractal – para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- [2] FRAME, M. and MANDELBROT, B. **Introduction to Fractal Geometry.** Disponível em: <<http://classes.yale.edu/99-00/math190a/>> Acessado em: 1º. Out 2004.
- [3] MENEZES, M. S., CUNHA JR, H. A. **Formas geométricas e estruturas fractais na cultura africana e afrodescendentes** In: DE PRETO A AFRODESCENDENTE: trajetos de pesquisa sobre o negro, cultura negra e relações étnico-raciais no Brasil ed.São Carlos : EduFSCar Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2003, p. 307-320.
- [4] RINALDI, R. M., MENEZES, M. S. **Novas formas de construção geométrica: o mundo dos fractais.** Relatório de Pesquisa PIBIC/CNPq/Unesp. Faac - Unesp, 2006.