GRAPHICA
CURITIBA, PARANÁ - BRASIL 2007

GEOMETRIA DINÂMICA – DA CONSTRUÇÃO À UTILIZAÇÃO DE UM *SOFTWARE* NO ENSINO

Zizelane Mateus
Deise Maria Bertholdi Costa
Josué Ervin Musial
UFPR - Universidade Federal do Paraná, Departamento de Desenho
zizelane@yahoo.com.br, deise@ufpr.br, ajmusial@gmail.com

RESUMO

O aprendizado pode tornar-se mais interessante quando o aluno participa dele de maneira interativa. Com isto em mente, foi desenvolvido um software de geometria dinâmica para o ensino de transformações geométricas. O próximo passo foi utilizar o programa com pessoas de diferentes níveis de conhecimento de matemática para verificar se o mesmo é um diferencial para o estudo de transformações geométricas. Decidimos escolher dois estudantes, um da área de Matemática e outro da área de Humanas. Aplicamos para eles alguns exercícios e os resultados que obtivemos corresponderam as nossas expectativas, além de nos auxiliar a entender o que se espera de uma ferramenta para a educação.

Palavras-chave: desenvolvimento de *software*, geometria dinâmica, educação

ABSTRACT

The learning process becomes more interesting when the student have a more interactive role. With this in mind a dynamic geometry software was developed for teaching geometric transformations. The next step was to test the software with people having different knowledge in mathematics in order to verify if it is really a plus for the study of geometric transformations. It was decided to choose two students, one graduating in Mathematics and the other from another area. Some exercises were applied to them and the achieved results match our expectations, besides giving us the understanding of what is expected in an education tool.

Keywords: software development, dynamic geometry, education

1 Introdução

O maior motivo pelo qual a geometria dinâmica tem obtido muito espaço entre os estudantes e os educadores da área de geometria é que ela proporciona a interatividade do usuário com o programa, onde é possível ver instantaneamente alterações sofridas pela figura devido ao movimento e a preservação de propriedades. A partir desta visualização é possível que o aluno resolva matematicamente os problemas propostos graficamente, já que com o auxílio de uma ferramenta gráfica a dedução de soluções ou contra-exemplos torna-se mais natural. Claro que o desenho não demonstra nada, mas auxilia na formação de hipóteses. Podemos assim dizer que esse processo de verificação desenvolve no aluno o raciocínio e o espírito investigativo.

É dentro dessa perspectiva que desenvolvemos o programa visando que o usuário - uma vez que já conheça o conteúdo de transformações - possa explorá-lo mais sobre uma diferente ótica fazendo com que conjeture e tire conclusões sobre este conteúdo. E para os usuários que não conhecem ou não estão familiarizados com o assunto de transformações o programa seja uma ferramenta de apoio ao ensino deste conteúdo.

Algumas atividades sobre transformações no plano foram propostas e testadas utilizando-se o *software* desenvolvido com dois alunos de diferentes níveis de instrução, um aluno do curso de Licenciatura em Matemática e outro da área de Humanas.

2 Transformações no plano

O que é uma transformação? – No dicionário encontramos a palavra TRANSFORMAR.

Transformar - 1. Mudar a forma de; transfigurar. 2. Converter; trocar. 3. Tornar diferente do que era; alterar. 4. Converter-se noutra forma; transfigurar-se.

Podemos, então, deduzir o significado de transformações. Transformação seria algo que muda a forma, troca, torna diferente ou altera determinada coisa. O que no nosso caso são essas coisas que a tal transformação altera? Como o título nos sugere, seria algo que tem relação com a geometria. Portanto, podemos dizer que transformações são modificações executadas em figuras.

As transformações podem ser: translação, rotação, reflexões, escalamento, cisalhamento e deformações. Transformações são funções que são aplicadas num conjunto de pontos que determinam um objeto. Podemos então, escrever as novas coordenadas, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, dos pontos, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, que estão sobre a ação da transformação da seguinte forma: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Sendo T = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz de transformação de ordem 2x2.

2.1 Isometrias

Preservam o tamanho original da figura, ou seja, preservam a distância entre os pontos que a determinam. Translações, reflexões e rotações são transformações isométricas.

2.2 Translação

Uma figura sofre uma translação quando se desloca numa direção fixada. A translação é uma isometria, pois essa transformação preserva a distância entre os pontos que determinam a figura. Sabemos que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade (não altera a figura). Para tanto, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Mas se somarmos ao vetor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ o vetor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, onde e, f são constantes, mudamos a figura inicial para outra posição. Em termos matriciais, podemos escrever a translação da seguinte maneira: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

2.3 Rotação

A Rotação é um movimento giratório. Uma figura sofre uma rotação quando se desloca no plano cartesiano segundo um determinado ângulo. A rotação é uma isometria, pois preserva a distância entre os pontos que determinam a figura. Consideremos $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. A matriz da transformação Rotação(R) é dada por R = $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Em termos matriciais, podemos escrever a Rotação da seguinte maneira: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Onde, θ é o ângulo de rotação e a origem do sistema cartesiano é o centro de rotação. Deste modo, cada ponto do objeto é rotacionado de um mesmo ângulo. A medida do ângulo segue o sentido anti-horário, a partir da reta determinada pelo ponto da figura inicial e a origem do sistema cartesiano.

2.4 Reflexão

A reflexão é uma isometria, pois essa transformação preserva a distância entre os pontos que determinam a figura. Alguns tipos de reflexão são:

- Reflexão em torno do eixo Y: A matriz da transformação Reflexão (F) em torno do eixo Y é dada por F = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$
- Reflexão em torno do eixo X: A matriz da transformação Reflexão(F) em torno do eixo X é dada por F = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
- Reflexão em torno da reta y = x: A matriz da transformação Reflexão em torno da reta y = x é dada por F = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
- Reflexão em torno da reta y = -x: A matriz da transformação Reflexão em torno da reta y= -x é dada por F = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$

2.5 Escalonamento

Figuras que apresentam mesma forma que a inicial, mas possuem tamanhos diferentes, ou seja, sofrem ação de redução (contração) ou ampliação (dilatação). Em muitos livros encontramos sinônimos para escalamento, tais como: homotetia e até mesmo semelhança. A matriz da transformação Escalamento (E) é dada por E = $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, onde α é o fator de escalamento. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2.6 Cisalhamento

- A matriz da transformação Cisalhamento(C) no eixo X é dada por C = $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Onde k é o fator de cisalhamento. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}$.

- A matriz da transformação Cisalhamento(C) no eixo Y é dada por C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. Onde k é o fator de cisalhamento. Em termos matriciais: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ kx + y \end{pmatrix}$

2.7 Deformações

São modificações que não mantém regularidades, fazendo o objeto perder qualquer semelhança com a forma primitiva. Ou seja, basta que tomemos valores arbitrários para as constantes a, b, c e d na seguinte matriz: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3 Um Programa de computador que auxilie o ensino de transformações

O programa desenvolvido (usando linguagem Visual Basic 5) possui a seguinte aparência (Figura 1):

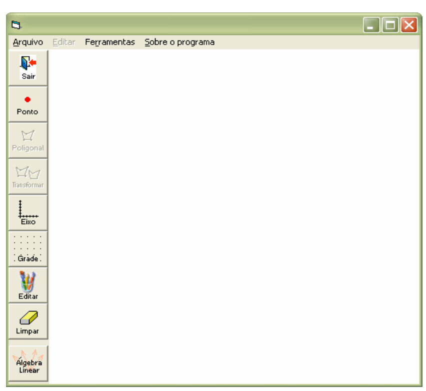

Figura 1: Aparência do programa

O programa consiste da criação de pontos cuja posição é determinada pelo usuário, numerados segundo a ordem de criação. A criação da poligonal também segue a ordem de criação dos pontos. A partir desta etapa, podem-se mover os pontos criados. Tendo a poligonal construída, podemos aplicar uma determinada transformação, e ainda redefinir várias vezes as transformações aplicadas sobre um mesmo objeto. Para isso é necessário abrir a janela (Figura 2):

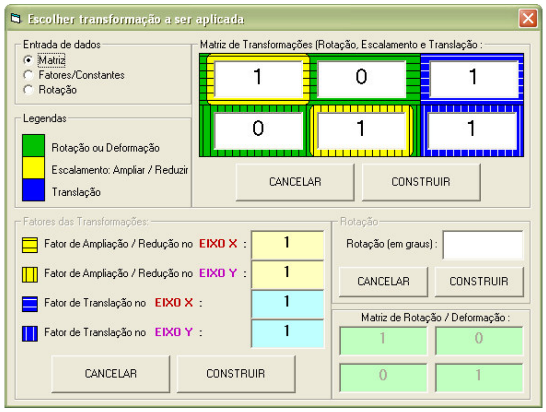

Figura 2: Entrada de dados para as transformações

Só pode ser feita uma das opções de entrada de dados de cada vez. Para isso, é necessário escolher um tipo de entrada antes na caixa “Entrada de Dados”. A entrada de dados para a transformação pode ser feita de três maneiras:

- Por meio de matriz. Dada como vimos no item anterior: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
- Por meio de fatores de escalonamento e translação. Neste programa, podemos alterar os fatores de redução, ampliação e translação nos eixos X e Y. Dependendo destes fatores, podemos ter como resultados simetrias, translações, cisalhamentos, deformações.
- Ângulo de rotação. A rotação tem o eixo X e a origem do sistema como referências.

O diferencial do programa é que o usuário pode definir a transformação e modificar a posição e a forma do objeto a ser transformado, acompanhando instantaneamente o resultado da transformação aplicada.

4 A Nossa Proposta de Aplicação

As atividades foram realizadas em períodos diferentes com cada colaborador para que tivesse mais tempo de conversar e interagir com eles de forma a poder entender melhor o que cada um estava pensando. Deixei que eles entrassem em contanto com o programa. Nesta etapa não houve intervenção de minha parte. Deixei-os absolutamente livres para que “tentassem decifrar” o programa. A seguir expliquei algumas noções básicas de como funcionava o programa.

Partimos para o trabalho de reconhecimento da ferramenta, deixando que eles construíssem objetos geométricos elementares, tais como: pontos, segmentos, poligonais. Claro que como qualquer pessoa que entra em contato com um mundo visual, eles procuram também dar mais vida às figuras que criam e assim foi bem interessante o programa proporcionar opções para cores e espessuras, pois deixa os traços com aparência agradável e ainda proporciona a diferenciação entre as transformações e os objetos iniciais. Foi muito gratificante ver que nossa preocupação com a aparência era relevante pois, algumas pessoas têm dificuldades para visualizações geométricas e o entendimento do que é uma transformação está baseado na visualização, e por isso nos utilizamos de algumas opções disponíveis para mostrar esse mundo das transformações de forma simples e agradável.

Buscamos primeiramente resgatar as informações que cada um possuía sobre o que seriam Transformações. Perguntamos por exemplo, o que tínhamos que fazer para levar um sofá de um canto da sala para outro. Ou então, o que acontecia com um balão quando começamos a enchê-lo e depois quando soltamos o ar que estava dentro deste balão. Perguntamos o que acontecia quando o vento soprava em um cata-vento ou nos galhos de uma árvore. As respostas que obtivemos serviram para começarmos a entrar no assunto de transformações, pois, mudanças na orientação, tamanho e formato estão ligadas às transformações. Ou seja, a movimentação do sofá pela sala está ligada à translação; o encher e esvaziar do balão está ligada à ampliação e redução; já o vento soprando no cata-vento produz uma transformação chamada de rotação; e ainda, o vento batendo em um galho de árvore produz um movimento que poderíamos caracterizar como cisalhamento. Ou seja, mesmo que nem todos saibam definir o que é uma transformações eles tem contato com elas nas mais diferentes ocasiões do cotidiano. E foi assim que começamos a mostrar para nossos colaboradores a importância de se estudar essas transformações.

A partir de agora, estaremos descrevendo algumas atividades elaboradas por nós e também mostrando soluções que nos foram apresentadas pelos alunos.

Chamaremos de Aluno 1 o aluno que conhece bem o assunto transformações e Aluno 2 o aluno que possui apenas conhecimentos do ensino médio.

Antes de iniciar, pedi que eles fizessem anotações: coordenadas e/ou desenho da figura inicial. E também de cada matriz ou entrada de dados da transformação que eles escolheram e quais os resultados que eles obtiveram com determinada transformação.

O objetivo deste tipo de atividade é fazer com que eles percebam relações entre a transformação que eles aplicaram e as modificações que ela causa na figura inicial. Poderíamos chamar este processo de investigação. Ele desenvolve o raciocínio e a percepção geométrica do aluno envolvido.

As atividades que foram aplicadas são descritas a seguir:

Atividade 1. Seja o retângulo de vértices A = (1,1), B = (1,3), C = (5,3) e D = (5,1):

a) Numa folha de caderno, utilizando os pares de números dados, some 5 unidades ao primeiro elemento de cada par. Obtendo assim quatro novos pares F, G, H e I:

Solução: F =(1,1)+(5,0)=(6,1); G =(1,3)+(5,0)=(6,3); H =(5,3)+(5,0)=(10,3); I =(5,1)+(5,0)=(10,1)

Aluno 1: *Não teve dificuldade em realizar a atividade.*

Aluno 2: *Como não recordava muito bem como era feito as operações com pares ordenados, tive que relembrá-lo para que assim pudesse concluir a atividade. Mas não houve dificuldades a não ser o esquecimento do assunto relacionado.*

b) Você saberia dizer qual foi a transformação geométrica ocorrida?

Aluno 1: *Não teve dificuldade em realizar a atividade. Como tem domínio do assunto quando viu tratar-se de soma de coordenada, identificou logo que era uma translação.*

Aluno 2: *Para que a atividade fosse realizada com satisfação foi necessário que pedisse ao aluno que desenhasse em um eixo cartesiano os pontos dados no exercício e também os pontos encontrados por ele. Assim que isso foi feito o aluno me disse que a figura foi 'arrastada, movida'.*

Então descrevi que essa é a caracterização de um movimento chamado de translação. A seguir expliquei que esse movimento de translação poderia ocorrer tanto no eixo X quanto no eixo Y e ainda mais, poderia ocorrer simultaneamente nos dois eixos.

Após a atividade resolvida no papel, pedi para que realizassem a mesma atividade no programa. Com a ajuda dos eixos e grade eles construíram um retângulo (figura gerada pelos pontos do exercício). A seguir, utilizaram a ferramenta transformação.

Aluno 1: *Optou por colocar o fator de translação. Mas sem dificuldades me disse como poderia ser feito a partir da matriz de transformação.*

Aluno 2: *Não teve dificuldades em realizar a atividade, pois identificou logo que deveria colocar no campo destinado ao fator de translação no eixo X o número 5. Mas perguntou se também era possível obter o mesmo resultado a partir da entrada da matriz de transformação. E eu respondi que seria sim possível. Expliquei como era representada a matriz* (Figura 3):

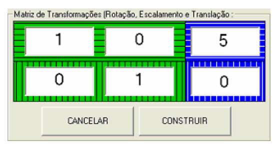

Figura 3: Matriz de entrada de dados

A matriz encontrada na Figura 3, era o mesmo que: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ ou seja, o ponto (x´, y´) era o resultado da transformação. Nas entradas nos campos em verde eram colocados os valores da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por se tratar de um movimento que não muda a forma.

Disse ainda que os valores de x e y eram as coordenadas do ponto que tínhamos da figura inicial e era por isso que não precisava colocá-lo na matriz do programa. Já nos campos em azul é onde devemos colocar os fatores de translação no eixo X e no eixo Y. Então o aluno colocou como eu havia explicado e viu que o resultado era o mesmo. Então deixei que ele mexesse um pouco com essa nova "descoberta". Ele criou novas figuras, colocou valores diferentes para os fatores de translação e também moveu na tela, vendo que mesmo que se alterasse a forma da figura, a transformação mantinha o formato e o tamanho e ainda o mesmo fator de translação. A meu ver, essa manipulação é importante para a fixação do conteúdo.

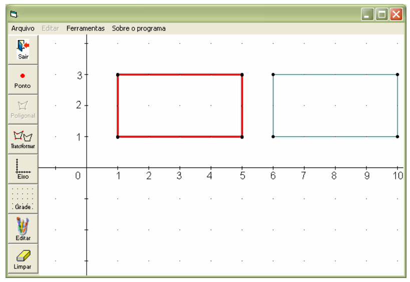

Figura 4: Solução da atividade proposta 1 – Translação

Atividade 2. Seja o retângulo de vértices A = (1,1), B = (1,3), C = (5,3) e D = (5,1):

a) Numa folha de caderno, utilizando os pares de números dados acima, troque os valores de x e y. Obtendo assim quatro novos pares formando o retângulo EFGH.

Solução: E = (1,1) = (1,1); F = (1,3) = (3,1); G = (5,3) = (3,5); H = (5,1) = (1,5)

Alunos 1 e 2 : *Sem dificuldade em realizar a atividade.*

b) Você saberia dizer qual foi a transformação geométrica ocorrida?

Aluno 1: *Identificou logo que era uma reflexão ou simetria. Ainda mostrou-me com um gesto com as mãos o movimento realizado.*

Aluno 2: *O aluno sozinho desenhou num papel a figura inicial e a figura transformada, e me disse que era como se tivesse sido colocado um espelho. Então eu disse essa é a caracterização de um movimento chamado de reflexão.*

Expliquei que esse movimento de reflexão pode ser realizado através de pontos e retas. Pedi para realizassem a mesma atividade no programa. Com a ajuda dos eixos e grade eles construíram o retângulo e foram na ferramenta transformação.

Aluno 1: *O aluno não teve novamente dificuldades. Inclusive ele gostou muito de mexer com o programa. Elogiou muito o fato de poder mexer na figura e ver instantaneamente o resultado da transformação.*

Aluno 2: *O aluno ficou preocupado pois, procurou algum campo onde pudesse colocar algum valor como na translação e não encontrou. Daí, me perguntou se a matriz era a única forma de fazer o que era pedido. Expliquei que deveria ser usada a matriz para realizar a atividade. Ele me perguntou como, pois o campo azul era usado para translação, ou seja, se a reflexão era feita através da matriz, deveriam ser colocados valores diferentes nos campos em verde. Afirmei que deveriam ser usados estes campos. E pedi sugestão de como deveria ser. Ele relembrou que, de acordo com a explicação de translação onde existiam as variáveis x e y, os campos da linha de cima mexiam com valores do eixo X e campos da linha de baixo mexiam com o eixo Y (isso é devido a operação de matrizes). Ou seja, como não teve translação deveriam ser zerados os campos de translação e como foi proposto que se invertessem os valores de x com y no inicio da atividade, devia ser feito isso também aqui. Ele achou que devia ser trocado o "1" com o "0" da primeira coluna e o "0" com o "1" na segunda coluna.*

Ele ficou feliz ao ver que seu raciocínio estava certo. Disse que a matriz encontrada representa a reflexão em torno da reta y=x, ou seja, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Deixei novamente que eles fizessem outras experiências com essa transformação, falamos então da reflexão em torno dos eixos X, Y e da reta y = -x. Inclusive foi permitido que eles fizessem a composição da translação com a reflexão. Na figura 5 está a solução da atividade 2.

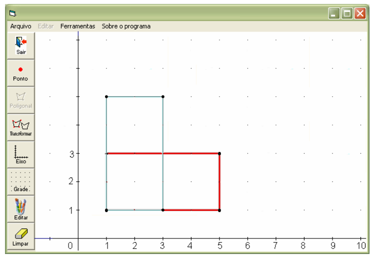

Figura 5: Solução da atividade proposta 2 – Reflexão

Atividade 3. Foi realizado o mesmo tipo de atividade para a rotação de 90º.

Iniciamos a atividade explicando que para nossa conveniência, adotaríamos o sentido anti-horário e com a contagem sendo crescente a partir do eixo X. O centro de rotação que adotaríamos seria a origem do nosso sistema (ponto (0,0)). Começamos essa atividade com ângulo de 90º. E para minha surpresa, os dois alunos me sugeriram que a rotação de 90º era o mesmo que fazer a reflexão em torno da reta y = x e refletir o resultado em torno do eixo Y.

Falei então que era isso mesmo, mas que infelizmente o programa ainda não suportava a composição de transformações. Inclusive isso nos deu a idéia de talvez um dia incorporar esse método ao programa, pois julgamos que seria de grande ajuda. Mas como tinha surgido essa idéia, então resolvi aplicá-la. Peguei papel e caneta, escrevi as duas matrizes de reflexão.

O aluno 1 comentou que devia ser multiplicado a matriz de reflexão em torno da reta y=x, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pela de reflexão em torno do eixo Y, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pois, a composição de transformação é um produto de matrizes. Ao realizar esse teste com o aluno 2, expliquei porque deveria fazer a multiplicação das matrizes para obter a matriz de rotação de 90º. Fizemos então: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. E assim, obtivemos a matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Foi então que comparei esse resultado com a matriz de rotação $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ onde θ=90º. E assim verificamos que sempre que colocarmos valores correspondentes aos senos e co-senos do ângulo que queremos utilizar na transformação o resultado será a rotação da figura inicial. Na figura 6 é mostrada a solução para a atividade proposta 3.

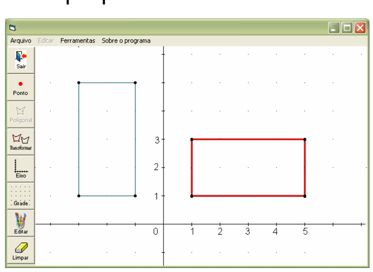

Figura 6: Solução da atividade proposta 3 – Rotação

5 Conclusões ou Considerações Finais

Foram realizados outras atividades, falamos ainda sobre cisalhamento e deformação. Mas acredito que os exercícios que coloquei aqui e os comentários a respeito já mostram uma idéia do que foi o teste. Coloquei algumas atividades que mostram como comecei o assunto com os dois alunos. Claro que o teste foi muito mais rápido com o Aluno 1, pois ele já conhecia o assunto e entendia muito de computadores. Já conhecia outros *softwares* de geometria e não teve dificuldades em resolver os exercícios tanto manual como computacionalmente. Já com o Aluno 2 o teste foi muito mais demorado, pois foi necessário apresentá-lo ao programa e explicar seu funcionamento e ensinar o assunto de transformações para ele também.

Pude analisar que com o Aluno 1, o programa foi mais útil como meio de testar várias transformações em pouco tempo. Pois assim, ele pode verificar que tipo de transformação algumas matrizes que ele inventou realizavam na figura inicial. Creio que para ele serviu muito mais como verificação de conjecturas, já para o Aluno 2 com certeza o programa serviu como material de apoio para o ensino e fixação do conteúdo. Afirmo isso pois o aluno me falou que "o fato de ver vários exemplos e de poder mover as figuras iniciais e verificar que as propriedades de cada transformação não são alteradas pelo movimento me fez entender bem esse assunto".

Para mim, foi uma atividade bem gratificante. Poder aplicar algo e ver que, mesmo sendo simples, atende às expectativas que tínhamos quando iniciamos o projeto foi muito interessante. É um grande desafio criar um *software* que realmente tenha potencial para ser aplicado em sala de aula e que possibilite, não apenas uma forma de trabalho, mas diversas formas de explorá-lo. E ainda, que possuísse um diferencial comparado com os *softwares* existentes. Com certeza, foi isso o que buscamos o tempo todo, algo que seja bom e prático. Foi uma experiência fascinante tentar elaborar algo que fosse uma boa ferramenta de caráter didático. E ainda testar a utilização deste *software* com algumas pessoas que nos foram muito prestativas e que nos ajudaram muito dando dicas e corrigindo detalhes que fizeram com que o programa melhorasse.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha orientadora Deise Maria Bertholdi Costa e ao Josué Ervin Musial pelo apoio e incentivo, pois sem eles esse trabalho não seria possível. Também agradeço o apoio financeiro proporcionado pelo Programa de Iniciação Científica da UFPR.

Referências

[1] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. Álgebra linear. São Paulo: Harper and Row do Brasil, 1980.

[2] KARAS, E. W.; SERRA, C. P.; BILOTI, R. e outros autores (alunos orientandos). **Fractais: propriedades e construção**. Curitiba, 1989.

[3] PUTNOKI "Jota", José Carlos. **Elementos de geometria & desenho geométrico**. São Paulo: Editora Scipione, 1991.